व्यक्तगणित ।

दूसरा भाग

बहुत उदाहरणों से युक्त

बनारस के राजकीय संस्कृत पाठशाला में
गणित और ज्योतिःशास्त्र के
अध्यापक
श्रीबापूदेव शास्त्री ने
बनाया ।

ELEMENTS OF ARITHMETIC,

SECOND PART,

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

PANḌITA BA'PU' DEVA S'A'STRI',

PROFESSOR OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY IN THE SANSKRIT COLLEGE,
BENARES, HONORARY MEMBER OF THE ROYAL ASIATIC SOCIETY
OF GREAT BRITAIN AND IRELAND, HONORARY MEMBER OF
THE ASIATIC SOCIETY OF BENGAL AND FELLOW
OF THE CALCUTTA UNIVERSITY.

BENARES:

PRINTED AT THE MEDICAL HALL, PRESS.

1875.

दूसरे भाग के हर एक पुस्तक का मोल ग्यारह आने है ।

॥ अनुक्रमणिका ॥

अध्याय ३

अध्याय ४

अध्याय ३

इस में भिन्नसंख्याव्युत्पादन, भिन्नसंख्याओं का रूपभेद, उन का संकलन व्यवकलन, गुणन, भागहार, घातक्रिया, मूलक्रिया और प्रकीर्णक इतने प्रकरण हैं ।

१ भिन्नसंख्याव्युत्पादन ।

१२१ । यहां तक हमने अभिन्नसंख्या कहिये पूरी संख्या अर्थात् जो एक १ वा अनेक एकों के पूरे समूह हैं उन का गणित दिखलाया । इस में संकलन, व्यवकलन, और गुणन इन तीन परिकर्मों में फल अभिन्न आते हैं और भागहार में जहां भाजक से भाज्य निःशेष होता है वहां लब्धि अर्थात् फल अभिन्न आता है । परंतु जहां भाजक से भाज्य निःशेष नहीं होता वहां जो लब्धि आती है वही भिन्न संख्या अर्थात् टूटी हुई संख्या है पूरी संख्या नहीं है । उस का अब विचार करते हैं ।

जब भागहार का ऐसा प्रश्न है कि ६१ रुपये ८ मनुष्यों को समान बांट दिये जावें तो हर एक मनुष्य कितने २ रुपये पावेगा? तब इस प्रश्न के उत्तर के लिये जो ६१ इस संख्या में ८ का भाग देओ तो ठीक लब्धि पूरी नहीं आती । यहां ७ पूरी लब्धि है और ५ शेष बचता है । इस लिये ५ रुपय के समान आठ भाग करो तो एक भाग का जो मान होगा वह और ७ रुपये इन का योग हर एक मनुष्य पावेगा यही उत्तर है ।

इस से स्पष्ट होता है कि ६१ का ८ वां भाग अथवा ५ का ८ वां भाग कोइ पूरी संख्या नहीं है टूटी हुई संख्या है इस लिये इस को भिन्न संख्या कहते हैं । इसी लिये हर एक भिन्नसंख्या कोइ भाज्य भाजकों की लब्धि है जो भाज्य, भाजक से निःशेष नहीं होता ।

यहां भिन्न संख्या के भाज्य को अंश और भाजक को छेद कहते हैं । इसी अंश और छेद की संख्याओं के द्वारा भिन्न संख्या को द्योतित करते हैं सो ऐसा कि अंश की संख्या के नीचे एक रेखा खींच के उस के नीचे छेद की संख्या लिखते हैं । जैसा ५ का ८ वां भाग इस में ५ अंश है और ८ छेद है इस को $\frac{५}{८}$ यों लिखते हैं और इस को ५ का अष्टमांश कहते हैं अथवा ५ भागा ८ यों भी बोलते हैं ।

इसी भांति ६१ का ८ वां भाग अर्थात् ६१ अष्टमांश को $\frac{६१}{८}$ यों लिखते हैं । $\frac{६१}{८}$ का मान ७ और $\frac{५}{८}$ का योग है । यह ऊपर दिखलाया है । इस लिये $\frac{६१}{८} = ७ + \frac{५}{८}$ है । परंतु $७ + \frac{५}{८}$ इस को $७\frac{५}{८}$ यों ही लिखते हैं इस को भागानुबन्ध कहते हैं ।

१२२ । जब कि भिन्न संख्या को उस के भाज्यभाजकों की संख्याओं से द्योतित करते हैं तब इसी प्रकार से हर एक अभिन्न संख्या भी अपने भाज्यभाजकों की संख्याओं से भिन्न संख्या के रूप में द्योतित हो सकती है ।

जैसा $१३ = \frac{१३}{१} = \frac{२६}{२} = \frac{३९}{३}$ इत्यादि ।

१२३ । ऊपर जो भिन्न संख्या का लक्षण और मान दिखलाया उस से स्पष्ट है कि जब भिन्न संख्या के छेद से अंश छोटा है तब उस का मान १ से छोटा होगा । जब छेद के समान अंश है तब मान १ होगा और जब छेद से अंश बड़ा हो तब उस का मान १ से बड़ा होगा ।

१२४ । भिन्न संख्या के छेद की जो संख्या होगी उतने उस के अंश की संख्या के समान विभाग करो उन में एक विभाग उस भिन्न संख्या का मान है यह ऊपर दिखलाया । परंतु छेद की जो संख्या हो उतने १ के समान विभाग करो और उन में से अंश की जितनी संख्या हो उतने विभाग लेओ सो भी मान पूर्व मान के तुल्य हि होगा ।

जैसा । ५ इस संख्या के समान ८ विभाग करो उन में से एक विभाग $\frac{५}{८}$ का मान है । परंतु १ के समान ८ विभाग करो उन में से ५ विभाग लेओ वे भी $\frac{५}{८}$ के तुल्य हैं ।

इस की युक्ति अति स्पष्ट है ।

मानो किसी एक राशि का मान ५ है इस में एक २ के आठ २ समान विभाग करो तब समग्र राशि के अर्थात् ५ के समान ४० विभाग होंगे । अब ४० के ८ वें भाग में ५ विभाग हैं और १ के अष्टमांश ५ लेओ सो भी वेही ५ विभाग हैं । इस से उक्त अर्थ की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है । इस लिये $\frac{५}{८} = \frac{१}{८} \times ५$ यह उपपन्न हुआ ।

इसी भांति $\frac{3}{10}$ इस भिन्न संख्या के मान के लिये ३ के समान १० विभाग करो उन में से एक विभाग लेओ सो $\frac{3}{10}$ का मान है। अथवा १ के समान १० विभाग कर के उन में से ३ लेओ। यह भी $\frac{3}{10}$ का मान पूर्व मान के तुल्य हि है।

ओर भी $\frac{14}{9}$ यहां १४ के समान ९ विभाग करो उन में एक विभाग $\frac{14}{9}$ का मान है। अथवा १ के समान ९ विभाग करो उन में से १४ लेओ सो भी वही मान होगा। परंतु ९ में से १४ क्यों कर लिये जायेंगे यों कदाचित् सन्देह हो तो एक २ के नौ २ विभाग ऐसे उतने एकों के विभाग लेओ जो १४ से अधिक हों तो उन में से १४ विभाग लेने में कुछ बाधक नहीं है। इस की उपपत्ति ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है।

१२५। जो किसी भिन्न संख्या के अंश ओर छेद इन दोनों को किसी एक हि संख्या से गुण देओ वा दोनों में किसी एक हि संख्या का भाग देओ तोभी उस भिन्न संख्या के मान में कुछ भेद नहीं होता अर्थात् ज्यों का त्यों बना रहता है।

जैसा। $\frac{2}{5}$ इस के अंश ओर छेद को ३ से गुण देने से $\frac{6}{15}$ हुआ। इस का मान वही है जो $\frac{2}{5}$ का है अर्थात् $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$।

इस की उपपत्ति।

मानो किसी राशि का मान ५ है। इस में एक २ के तीन २ समान विभाग करो तो समग्र राशि के १५ विभाग होंगे। इस से स्पष्ट है कि जब उस राशि के १ पांचवे भाग में ३ पन्द्रहवे भाग हैं तब दो पांचवें भागों में ६ पन्द्रहवे भाग होंगे। इस लिये $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$। इसी भांति $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$, $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$ इत्या० सिद्ध होता है।

ओर जब कि $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ तब इस से स्पष्ट है कि अंश ओर छेद में जो एक हि संख्या का भाग देओ तो भी उस भिन्न संख्या के मान में कुछ विकार नहीं होता।

१२६। जो भिन्न संख्या को किसी अभिन्न संख्या से गुण देना हो तो गुणनफल के लिये उस भिन्न संख्या के अंश को उस अभिन्न संख्या से गुण देओ।

जैसा। $\frac{5}{7}$ को ३ से गुण देना है तब $\frac{5}{7}\times 3=\frac{5\times 3}{7}$ अर्थात् $\frac{15}{7}$।

क्यों कि जो १ के सातवे भाग ५ हैं उन को ३ से गुण देने से वेही भाग ३ × ५ अर्थात् १५ होंगे $\therefore \frac{5}{7}\times 3=\frac{15}{7}$ यह सिद्ध हुआ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $\frac{५}{१३}$ इस को ३, ४, ५, ८ और ११ इन से अलग २ गुणा देओ तो गुणनफल क्या होंगे?

उत्तर, $\frac{१५}{१३}, \frac{२०}{१३}, \frac{२५}{१३}, \frac{४०}{१३}$ और $\frac{५५}{१३}$।

(२) $\frac{२}{५}$ को ७ से, $\frac{३}{७}$ को ८ से, $\frac{५}{९}$ को २ से, $\frac{४}{१५}$ को २ से और $\frac{२}{१९}$ को ९ से गुणा के अलग २ गुणनफल कहो।

उत्तर, $\frac{१४}{५}, \frac{२४}{७}, \frac{१०}{९}, \frac{८}{१५}$ और $\frac{१८}{१९}$

अनुमान। जिस भिन्न संख्या में किसी अभिन्न संख्या का भाग देना हो उस का अंश जो उस अभिन्न संख्या से निःशेष होता हो तो लब्धि के लिये उस अंश में उस अभिन्न संख्या का भाग देओ। यह क्रिया ऊपर की क्रिया के उलटी है।

जैसा। $\frac{१५}{७}$ में ३ का भाग देना है तब $\frac{१५}{७} \div ३ = \frac{१५ \div ३}{७} = \frac{५}{७}$।

क्यों कि जो १ के सप्तमांश १५ हैं उन में ३ का भाग देने से वेही सप्तमांश १५ ÷ ३ अर्थात् ५ होंगे ∴ $\frac{१५}{७} \div ३ = \frac{१५ \div ३}{७} = \frac{५}{७}$।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $\frac{१२}{१७}$ इस में २, ३, ४, ६ और १२ इन का अलग २ भाग देके लब्धि कहो।

उत्तर, $\frac{६}{१७}, \frac{४}{१७}, \frac{३}{१७}, \frac{२}{१७}$ और $\frac{१}{१७}$।

(२) $\frac{८}{१३}$ में ४ का, $\frac{२६}{१९}$ में १३ का, $\frac{३९}{४०}$ में ३ का, $\frac{४९}{६०}$ में ७ का और $\frac{७५}{६८}$ में ५ का भाग देके अलग २ लब्धि कहो।

उत्तर, $\frac{२}{१३}, \frac{२}{१९}, \frac{१३}{४०}, \frac{७}{६०}$ और $\frac{१५}{६८}$।

१२७। जो भिन्न संख्या में किसी अभिन्न संख्या का भाग देना हो तो लब्धि के लिये उस भिन्न संख्या के छेद को उस अभिन्न संख्या से गुणा देओ।

जैसा। $\frac{५}{७}$ में ३ का भाग देना है तब $\frac{५}{७} \div ३ = \frac{५}{७ \times ३} = \frac{५}{२१}$।

क्यों कि जब $\frac{५}{७} = \frac{५ \times ३}{७ \times ३}$ प्र॰ (१२५)

$\therefore \frac{५}{७} \div ३ = \frac{५ \times ३}{७ \times ३} \div ३ = \frac{५ \times ३ \div ३}{७ \times ३}$ ऊपर के अनुमान से ।

इस लिये $\frac{५}{७} \div ३ = \frac{१५ \div ३}{७ \times ३} = \frac{५}{७ \times ३}$ यह सिद्ध हुआ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{७}{५}$ इस में ३, ४, ६, ८ और १२ इन का अलग २ भाग दे के लब्धि कहो ।

उत्तर, $\frac{७}{१५}, \frac{७}{२०}, \frac{७}{३०}, \frac{७}{४०}$ और $\frac{७}{६०}$ ।

(२) $\frac{४}{७}$ में ९ का, $\frac{९}{५}$ में ८ का, $\frac{८}{१३}$ में ३ का, $\frac{५}{११}$ में ४ का, और $\frac{१७}{१२}$ में १५ का भाग दे के अलग २ लब्धि कहो ।

उत्तर, $\frac{४}{६३}, \frac{९}{४०}, \frac{८}{३९}, \frac{५}{४४}$ और $\frac{१७}{१८०}$ ।

अनुमान । जिस भिन्न संख्या को किसी अभिन्न संख्या से गुण देना है उस का छेद जो उस अभिन्न संख्या से निःशेष होता हो तो गुणनफल के लिये छेद में उस अभिन्न संख्या का भाग देओ । यह ऊपर की क्रिया की उलटी क्रिया है ।

जैसा । $\frac{५}{२१}$ को ३ से गुण देना है तब $\frac{५}{२१} \times ३ = \frac{५}{२१ \div ३} = \frac{५}{७}$ ।

क्यों कि $\frac{५}{२१} \times ३ = \frac{१५}{२१}$ (प्र० १२६) $= \frac{१५ \div ३}{२१ \div ३}$ (प्र० १२५) $= \frac{५}{७}$ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{११}{६०}$ इस को ३, ४, ६, १२, १५ और २० इन से अलग २ गुण के गुणनफल कहो ।

उत्तर, $\frac{११}{२०}, \frac{११}{१५}, \frac{११}{१०}, \frac{११}{५}, \frac{११}{४}$ और $\frac{११}{३}$ ।

(२) $\frac{३}{४}$ को २ से, $\frac{५}{१२}$ को ४ से, $\frac{७}{२०}$ को ५ से, $\frac{८}{१५}$ को ३ से और $\frac{२८}{५७}$ को १९ से गुण के अलग २ गुणनफल कहो ।

उत्तर, $\frac{३}{२}, \frac{५}{३}, \frac{७}{४}, \frac{८}{५}$ और $\frac{२८}{३}$ ।

१२८ । इस में भिन्न संख्या के स्वरूपभेद से संज्ञाविशेष कहते हैं ।

(१) जिस भिन्न संख्या का अंश छेद से छोटा हो उस को सूक्ष्म भिन्न संख्या कहते हैं ।

जैसा। $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{७}$ इत्या०।

(२) जिस भिन्न संख्या का अंश छेद से बड़ा हो उस को न्यून भिन्न संख्या कहते हैं।

जैसा। $\frac{७}{४}$, $\frac{१४}{९}$ इत्या०।

(३) जिस भिन्न संख्या के अंश और छेद दोनों अभिन्न संख्या हैं उस को भागजाति कहते हैं।

जैसा। $\frac{१}{२}$, $\frac{७}{४}$।

(४) जिस भिन्न संख्या में भाग के भाग हैं उस को प्रभागजाति कहते हैं।

जैसा। $\frac{३}{४}$ के $\frac{५}{७}$, $\frac{२}{३}$ के $\frac{३}{५}$ के $\frac{७}{१०}$ इत्या०।

(५) जिस में अभिन्न संख्या किसी भागजाति से जोड़ी हुई है उस को भागानुबन्ध कहते हैं।

जैसा। $३+\frac{२}{५}$, $७+\frac{३}{८}$ इत्या०। परंतु यहां प्रायः भागानुबन्ध संख्या को $३\frac{२}{५}$, $७\frac{३}{८}$ यों हि लिखते हैं बीच में धन चिन्ह नहीं लिखते।

(६) जिस में अभिन्न संख्या किसी भागजाति से घटाई हुई है उस को भागापवाह कहते हैं।

जैसा। $२-\frac{१}{४}$, $५-\frac{२}{७}$ इत्या०।

(७) भागानुबन्ध और भागापवाह इन दोनों का साधारण नाम मिश्र भिन्नसंख्या है।

(८) जिस में अभिन्न वा भिन्न संख्या अपने किसी अंश से जोड़ी हुई है उस को स्वांशानुबन्ध और अपने किसी अंश से घटाई हुई है उस को स्वांशापवाह कहते हैं।

जैसा। जिस में $\frac{१}{४}$ में उसी के $\frac{२}{५}$ जोड़े हुए हैं उस को स्वांशानुबन्ध कहते हैं। इस को $\frac{१}{४}+\frac{२}{५}$ स्व, यों लिखते हैं। इसी प्रकार से $\frac{२}{३}+\frac{३}{५}$ स्व $+\frac{४}{९}$ स्व,

यह भी स्वांशानुबन्ध है । यह दिखलाता है कि $\frac{२}{३} + \frac{३}{५}$ स्व इस का जो मान होगा उस में उसी के $\frac{४}{६}$ जोड़ देओ । इत्यादि सब स्वांशानुबन्ध हैं । और

जहां $\frac{३}{४}$ में उसी के $\frac{५}{७}$ घटाये हैं उस को स्वांशापवाह कहते हैं । इस को $\frac{३}{४} - \frac{५}{७}$ स्व, यों लिखते हैं । इस भांति $\frac{१}{२} - \frac{३}{५}$ स्व $- \frac{४}{७}$ स्व, यह भी स्वांशापवाह है । यह दिखलाता है कि $\frac{१}{२} - \frac{३}{५}$ स्व, इस का जो मान होगा उस में उसी के $\frac{४}{७}$ घटा देओ ।

यहां स्वांशानुबन्ध और स्वांशापवाह को मिला के यों लिखते हैं ।

जैसा । $\frac{२}{५} - \frac{३}{७}$ स्व $+ \frac{५}{८}$ स्व, यह दिखलाता है कि $\frac{२}{५}$ में उसी के $\frac{३}{७}$ घटा देओ तब जो फल होगा उस में उसी के $\frac{५}{८}$ जोड़ देओ ।

(९) जिस भिन्न संख्या के अंश और छेद ये दोनों वा दो में से कोइ एक भागजाति, प्रभागजाति, मिश्रसंख्या, स्वांशानुबन्ध वा स्वांशापवाह हो उस को भिन्नभागजाति कहते हैं ।

जैसा । $\frac{\frac{३}{४}}{\frac{२}{७}}$, $\frac{५\frac{१}{३}}{८}$, $\frac{२}{३\frac{१}{७}}$, $\frac{८ - \frac{१}{९}}{६ + \frac{१}{२}}$, $\frac{३ + \frac{४}{३}\text{ स्व}}{६}$ इत्या० ।

२ भिन्न संख्या का रूपभेद ।

१२९ । भिन्न संख्या को एक रूप वा नाम में से दूसरे रूप वा नाम में करने के प्रकार को उस का रूपभेद कहते हैं । भिन्न संख्याओं के संकलन, व्यवकलन आदि परिकर्मों के लिये पहिले इस को अवश्य जानना चाहिये ।

१३० । भिन्न संख्या के अंश और छेद को किसी एक हि संख्या से गुण देओ वा भाग देओ तोभी उस संख्या के मान में कुछ विकार नहीं होता यह (१२५) वे प्रक्रम में दिखलाया है । इस से स्पष्ट है कि एक हि भागजाति के अंश और छेद अनेक प्रकार के हो सकते हैं और इस से उस भागजाति का रूप अनेक प्रकार का होता है उस में जिस रूप में अंश और छेद की संख्या सब से छोटी हो उस को उस भागजाति भिन्न संख्या का लघुतमरूप कहते हैं । उस के जानने का प्रकार ।

(१) पहिले अंश और छेद इन दोनों का महत्तमापवर्तन निकाल के उस का उन दोनों में भाग देने से उस भिन्नसंख्या का लघुतम रूप होगा।

उदा०। $\frac{१५६}{२२८}$ इस का लघुतमरूप क्या है?

यहां पहिले अंश और छेद के महत्तमापवर्तन के लिये न्यास

१५६) २२८ (१
७२) १५६ (२
१२) ७२ (६
०

इस लिये महत्तमापवर्तन १२ है।

अब १५६ ÷ १२ = १३ और २२८ ÷ १२ = १९।

∴ $\frac{१३}{१९}$ यह उद्दिष्ट संख्या का लघुतम रूप है।

इस की युक्ति यह है।

जब कि भिन्न संख्या के अंश और छेद में किसी एक हि संख्या का भाग देओ तोभी उस का मान नहीं बिगड़ता प्र· (१२५) और अंश और छेद में उन के महत्तमापवर्तन का भाग देने से वे परस्पर दृढ होते हैं अर्थात् और छोटे नहीं हो सकते प्र· (१०६) इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट है।

(२) जो (१०२) प्रक्रम की सहायता से अंश और छेद के कोइ साधारण अपवर्तनों की शीघ्र उपस्थिति हो तो उन का अंश और छेद में बार २ भाग देने से क्रम २ अभीष्ट लघुतमरूप लाघव से सिद्ध होगा। तब महत्तमापवर्तन जानने का परिश्रम न करना चाहिये।

अथवा (१०२) प्रक्रम के दूसरे अनुमान से अंश और छेद इन दोनों के अलग २ खण्ड करो तब दोनों में जो एक वा अनेक साधारण खण्ड होंगे उन को छेक देओ। जो शेष रहें वे क्रम से लघुतमरूप के अंश और छेद होंगे।

जैसा। ऊपर के उदाहरण में

$\frac{१५६}{२२८} = \frac{७८}{११४} = \frac{३९}{५७} = \frac{१३}{१९}$ यह लघुतमरूप है।

अथवा १५६ = २ × २ × ३ × १३ और २२८ = २ × २ × ३ × १९

यहां २, २ और ३ इन साधारण खण्डों को छेक देने से १३ यह लघुतम रूप का अंश और १९ यह लघुतम रूप का छेद है।

∴ $\frac{१३}{१९}$ यह लघुतम रूप है।

मिश्र संख्या के अंश और छेद की संख्या छोटी हों तो उन से गु-णने में वा भाग देने में लाघव होता है । यही मिश्र संख्या के लघुतम रूप का मुख्य प्रयोजन है । इस लिये जहां२ मिश्र संख्या से गणित करना हो तहां२ उस के स्थान में उस का लघुतम रूप लेना चाहिये और सर्वत्र अन्त में जो मिश्रसंख्यारूप फल उत्पन्न हो तो वहां उस का लघुतम रूप लिखते हैं ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

यह सिद्ध करो कि

(१) $\frac{३}{९}=\frac{१}{३}$ । (२) $\frac{१२}{१६}=\frac{३}{४}$ । (३) $\frac{१४}{३५}=\frac{२}{५}$ ।

(४) $\frac{२४}{४०}=\frac{३}{५}$ । (५) $\frac{४०}{५६}=\frac{५}{७}$ । (६) $\frac{५६}{९८}=\frac{४}{७}$ ।

(७) $\frac{६४}{१३६}=\frac{८}{१७}$ । (८) $\frac{९१}{१७५}=\frac{१३}{२५}$ । (९) $\frac{८१}{१८९}=\frac{३}{७}$ ।

(१०) $\frac{१३३}{१९०}=\frac{७}{१०}$ । (११) $\frac{१६१}{२०७}=\frac{७}{९}$ । (१२) $\frac{१७१}{२०९}=\frac{९}{११}$ ।

(१३) $\frac{१५२}{२४८}=\frac{१९}{३१}$ । (१४) $\frac{३२४}{३६९}=\frac{३६}{४१}$ । (१५) $\frac{२१७}{४६९}=\frac{३१}{६७}$ ।

(१६) $\frac{२१९}{५८४}=\frac{३}{८}$ । (१७) $\frac{२७३}{६११}=\frac{२१}{४७}$ । (१८) $\frac{४६५}{७१३}=\frac{१५}{२३}$ ।

(१९) $\frac{४१८}{९८८}=\frac{११}{२६}$ । (२०) $\frac{४३५}{१३६३}=\frac{१५}{४७}$ । (२१) $\frac{१११०}{१५९१}=\frac{३०}{४३}$ ।

(२२) $\frac{२४१५}{३१७१}=\frac{११५}{१५१}$ । (२३) $\frac{१६३५}{४२५१}=\frac{५}{१३}$ । (२४) $\frac{६८६४}{१५६००}=\frac{११}{२५}$ ।

(२५) $\frac{४८११}{१६१३१}=\frac{१७}{५७}$ । (२६) $\frac{१०६९२}{३५३१६}=\frac{३३}{१०९}$ । (२७) $\frac{१२०९०}{३९१५३}=\frac{१३०}{४२१}$ ।

(२८) $\frac{६२३२८}{७०६८०}=\frac{२६४}{३६५}$ । (२९) $\frac{५२३४४}{८५०५९}=\frac{८}{१३}$ । (३०) $\frac{५८७५२}{९३३१२}=\frac{१७}{२७}$ ।

(३१) $\frac{५५२९८}{९३८७८}=\frac{४३}{७३}$ । (३२) $\frac{६९०३०}{९६१७०}=\frac{११७}{१६३}$ । (३३) $\frac{७१४५०}{९७१७२}=\frac{२५}{३४}$ ।

(३४) $\frac{९४३८०}{१३०८४५}=\frac{४४}{६१}$ । (३५) $\frac{८२०२६}{२१०३५७}=\frac{६२}{१५९}$ । (३६) $\frac{४४५६०५}{५८२४०६}=\frac{१०८५}{२३०२}$ ।

१३१ । अभिन्न संख्या को भिन्न संख्या का अर्थात् भागजाति का रूप देने का प्रकार ऐसा कि जिस का छेद किसी इष्ट संख्या के समान हो ।

अभिन्न संख्या को इष्ट संख्या से गुण देओ। गुणनफल अभीष्ट संख्या का अंश होगा और इष्ट संख्या उस का छेद होगा।

उदा०। ७ इस अभिन्न संख्या को भागजाति का रूप देओ ऐसा कि उस का छेद ३ होवे।

तब ऊपर के प्रकार से ७ × ३ = २१ यह अंश है और इष्ट संख्या ३ यही छेद है। इस लिये $७ = \frac{२१}{३}$ यही अभीष्ट भागजाति का रूप है।

इस की युक्ति के लिये (१२२) वां प्रक्रम देखो।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) ३, ५, ९ और १७ इन अभिन्न संख्याओं को भागजाति का रूप देओ ऐसा कि उन के छेद क्रम से २, ७, ४ और ८ ये संख्या होवें।

उत्तर, $\frac{६}{२}$, $\frac{३५}{७}$, $\frac{३६}{४}$ और $\frac{१३६}{८}$।

(२) २५, २७, ३९, ६३ और ९६ इन अभिन्न संख्याओं को ऐसा भागजाति का रूप देओ कि उन के छेद क्रम से १२, ७, १, ९ और ३ होवें।

उत्तर, $\frac{३००}{१२}$, $\frac{१८९}{७}$, $\frac{३९}{१}$, $\frac{५६७}{९}$ और $\frac{२८८}{३}$।

(३) ३७, ७३, ८५, १०७ और ५१९ इन अभिन्न संख्याओं को ऐसा भागजाति का रूप देओ कि उन के छेद क्रम से ३, ५, ७, ४ और २ होवें।

उत्तर, $\frac{१११}{३}$, $\frac{३६५}{५}$, $\frac{५९५}{७}$, $\frac{४२८}{४}$ और $\frac{१०३८}{२}$।

(४) ३१३, ४२८, ७२०, और २९८८ इन को भागजाति का रूप देओ ऐसा कि उन के छेद क्रम से ११, १३, १५ और ७ होवें।

उत्तर, $\frac{३४४३}{११}$, $\frac{५५६४}{१३}$, $\frac{१०८००}{१५}$ और $\frac{२०९१६}{७}$।

१३२। प्रभागजाति भिन्न संख्या को भागजाति का रूप देने का प्रकार।

प्रभागजाति के सब अंशों का गुणनफल भागजाति का अंश होगा और सब छेदों का गुणनफल उस का छेद होगा।

उदा०। $\frac{४}{५}$ के $\frac{३}{८}$ इस को भागजाति का रूप देओ।

ऊपर के प्रकार के अनुसार, $\frac{४}{५}$ के $\frac{३}{८} = \frac{४ \times ३}{५ \times ८} = \frac{१२}{४०} = \frac{३}{१०}$ यह भागजाति का लघुतम रूप है।

अथवा यहां अनेक अंश और छेदों में जो कोइ एक अंश और एक छेद इन दोनों में किसी एक हि संख्या का अपवर्तन लगता हो (अर्थात् वे दोनों किसी एक हि संख्या से निःशेष होते हों) तो उन को अपवर्तन देके फिर गुणन करो। इस की युक्ति (१२५) वे प्रक्रम मे स्पष्ट है।

जैसा। $\frac{४}{५}$ के $\frac{३}{८} = \frac{४ \times ३}{५ \times ८} = \frac{१' \times ३}{५ \times २'} = \frac{३}{१०}$

इस में अपवर्तन दिये हुए अंश और छेद को १', २' यों स्वरित किया है ऐसा हि अपवर्तितों को सर्वत्र स्वरित करो।

इस प्रकार की उपपत्ति।

$\frac{४}{५}$ के $\frac{३}{८}$ इस का अर्थ यह है कि $\frac{४}{५}$ का जो $\frac{१}{८}$ अर्थात् ८ वां भाग उस को ३ से गुणा देओ।

अब $\frac{४}{५}$ का ८ वां भाग $= \frac{४}{५} \div ८ = \frac{४}{५ \times ८}$ प्र· (१२७)

और $\frac{४}{५ \times ८}$ इस को ३ से गुणा देने से $\frac{४}{५ \times ८} \times ३ = \frac{४ \times ३}{५ \times ८}$ प्र· (१२८)

इस से इस प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट होती है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

यह सिद्ध करो कि

(१) $\frac{१}{२}$ के $\frac{२}{३} = \frac{१}{३}$। (२) $\frac{३}{४}$ के $\frac{५}{६} = \frac{५}{८}$। (३) $\frac{३}{८}$ के $\frac{४}{५} = \frac{३}{१०}$।

(४) $\frac{१५}{१६}$ के $\frac{४}{५} = \frac{३}{४}$। (५) $\frac{२}{३}$ के $\frac{३}{४}$ के $\frac{४}{५} = \frac{२}{५}$। (६) ४ के $\frac{३}{७}$ के $\frac{५}{८}$ के $\frac{७}{९} = \frac{५}{६}$।

(७) १५ के $\frac{१}{२}$ के $\frac{१}{३}$ के $\frac{१}{४}$ का $\frac{१}{५} = \frac{१}{८}$।

(८) $\frac{१}{२}$ के $\frac{३}{४}$ के $\frac{५}{७}$ के $\frac{११}{१३}$ के $\frac{१७}{१९} = \frac{२८०५}{१३८३२}$।

(९) $\frac{१}{२}$ के $\frac{२}{३}$ के $\frac{३}{४}$ के $\frac{१}{५}$ के $\frac{१}{१६}$ का $\frac{१}{४} = \frac{१}{१२८०}$।

(१०) $\frac{९}{१०}$ के $\frac{८}{९}$ के $\frac{७}{८}$ के $\frac{६}{७}$ के $\frac{५}{६}$ के $\frac{४}{५}$ के $\frac{३}{४}$ के $\frac{२}{३}$ का $\frac{१}{२} = \frac{१}{१०}$।

(११) ११७ के $\frac{१४}{१५}$ के $\frac{११}{१२}$ के $\frac{६}{१३}$ के $\frac{२}{११}$ के $\frac{५}{८}$ के $\frac{४}{९}$ के $\frac{३}{७} = १$।

(१२) १००० के $\frac{२०}{२१}$ के $\frac{२०}{२१}$ के $\frac{२०}{२१}$ के $\frac{२०}{२१}$ के $\frac{२०}{२१} = \frac{३२०००००००}{४०८४१०१}$।

१३३ । स्थूल भिन्न संख्या को उस के अभिन्न संख्या का वा भागानुबन्ध का रूप देने का प्रकार ।

अंश में छेद का भाग देओ । जो शेष कुछ न रहे तो लब्धि अभिन्न संख्या होगी । यही अभीष्ट रूप है । और जो कुछ शेष बचे तो जो पूरी लब्धि है सो अभीष्ट भागानुबन्ध का अभिन्न विभाग होगा और जो शेष है वह उस भागानुबन्ध के भागजातिरूप विभाग का अंश होगा और जो छेद है सो हि उस का छेद होगा ।

उदा० । $\frac{१८}{६}$ और $\frac{२९}{८}$ इन स्थूल भिन्न संख्याओं को अभिन्न संख्या का वा भागानुबन्ध का रूप देओ ।

न्यास । $\frac{१८}{६} = १८ \div ६ = ३$ यह अभिन्न संख्या है ।

और $\frac{२९}{८} = २९ \div ८ = ३\frac{५}{८}$ यह भागानुबन्ध है ।

इस प्रकार की उपपत्ति ।

जब कि उद्दिष्ट भिन्न संख्या का अंश भाज्य है और छेद भाजक है तब लब्धि उस का वास्तव मान होगा । इस लिये लब्धि जानने के प्रकार की उपपत्ति भागहार से स्पष्ट है । (१२१) वां प्रक्रम देखो ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{१२}{३} = ४$ । (२) $\frac{४९}{८} = ६\frac{१}{८}$ । (३) $\frac{६१}{९} = ६\frac{७}{९}$ ।

(४) $\frac{९५}{११} = ८\frac{७}{११}$ । (५) $\frac{१०५}{१५} = ७$ । (६) $\frac{१२३}{१६} = ७\frac{११}{१६}$ ।

(७) $\frac{२४५}{१८} = १३\frac{११}{१८}$ । (८) $\frac{३५९}{२७} = १३\frac{८}{२७}$ । (९) $\frac{४८७}{३९} = १२\frac{१९}{३९}$ ।

(१०) $\frac{५९३}{४८} = १२\frac{१७}{४८}$ । (११) $\frac{८७१}{६७} = १३$ । (१२) $\frac{९८३}{७८} = १२\frac{४७}{७८}$ ।

(१३) $\frac{१४६२}{८६} = १७$ । (१४) $\frac{१५८४}{९७} = १६\frac{३२}{९७}$ । (१५) $\frac{१९८४}{१०३} = १९\frac{२७}{१०३}$ ।

(१६) $\frac{२०००}{११७} = १७\frac{११}{११७}$ । (१७) $\frac{२५४०}{५९} = ४३\frac{३}{५९}$ । (१८) $\frac{५३५३}{२९७} = १८\frac{७}{२९७}$ ।

(१९) $\frac{७२४५}{३१५} = २३$ । (२०) $\frac{९७१४}{३५७} = २७\frac{७५}{३५७}$ ।

(२१) $\frac{२९४५०}{४५७} = ६४\frac{२०२}{४५७}$ । (२२) $\frac{९२०७०}{४६५} = १९८$ ।

(२३) $\frac{१५२८३७}{५९७} = २५६\frac{५}{५९७}$ । (२४) $\frac{६२८१०४}{७९३५} = ७९\frac{१२३९}{७९३५}$ ।

१३४ । मिश्र भिन्न संख्या को अर्थात् भागानुबन्ध और भागापवाह को उस के समान भागजाति का रूप देने का प्रकार ।

भागानुबन्ध वा भागापवाह के भिन्न संख्या का छेद और अभिन्न संख्या इन के गुणनफल में भिन्न संख्या का अंश क्रम से जोड़ वा घटा देओ । जो बनेगा सो अभीष्ट भागजाति का अंश है । और मिश्र संख्या में भिन्न संख्या का जो छेद है सो हि अभीष्ट भागजाति का छेद है ।

उदा० । $३\frac{२}{५}$ और $३ - \frac{२}{५}$ इन भागानुबन्ध और भागापवाह भिन्न संख्याओं को भागजाति का रूप देओ ।

न्यास । $३\frac{२}{५} = \frac{३ \times ५ + २}{५} = \frac{१५ + २}{५} = \frac{१७}{५}$ यही अभीष्ट रूप है ।

और $३ - \frac{२}{५} = \frac{३ \times ५ - २}{५} = \frac{१५ - २}{५} = \frac{१३}{५}$

इस प्रकार की उपपत्ति ।

$३\frac{२}{५}$ यह ३ अभिन्न संख्या और $\frac{२}{५}$ भिन्न संख्या इन का योग है और $३ - \frac{२}{५}$ यह उन्हीं दोनों का अन्तर है ।

और $३ = \frac{३ \times ५}{५} = \frac{१५}{५}$ प्र० (१२२) और (१३१)

इस लिये $३\frac{२}{५}$ यह $\frac{१५}{५}$ और $\frac{२}{५}$ इन का योग है ।

और $३ - \frac{२}{५}$ यह $\frac{१५}{५}$ और $\frac{२}{५}$ इन का अन्तर है ।

अब $\frac{१५}{५}$ इस का मान १ के पञ्चमांश १५ हैं । और $\frac{२}{५}$ इस का मान १ के पञ्चमांश दो हैं । इस लिये १५ पञ्चमांश और २ पञ्चमांश इन का योग १७ पञ्चमांश होगा और अन्तर १३ पञ्चमांश होगा । इस से स्पष्ट है कि

$३\frac{२}{५} = \frac{१५}{५} + \frac{२}{५} = \frac{१५ + २}{५} = \frac{१७}{५}$ । और $३ - \frac{२}{५} = \frac{१५}{५} - \frac{२}{५} = \frac{१५ - २}{५} = \frac{१३}{५}$ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $३\frac{१}{२} = \frac{७}{२}$ । (२) $२ - \frac{१}{३} = \frac{५}{३}$ । (३) $५\frac{२}{३} = \frac{१७}{३}$

(४) $७\frac{५}{८} = \frac{६१}{८}$ । (५) $९ - \frac{३}{४} = \frac{३३}{४}$ । (६) $२३\frac{३}{११} = \frac{२५६}{११}$ ।

(७) $४७\frac{८}{१५} = \frac{७१३}{१५}$ । (८) $५६\frac{१२}{१७} = \frac{९६४}{१७}$ । (९) $६२ - \frac{१३}{२४} = \frac{१४७५}{२४}$ ।

(१०) $७३\frac{२५}{२९} = \frac{२१४२}{२९}$ ।

(११) $८४\frac{३३}{३८} = \frac{३२२५}{३८}$ ।

(१२) $९३\frac{८}{४७} = \frac{४३७९}{४७}$ ।

(१३) $१०४\frac{१७}{५३} = \frac{५५२९}{५३}$ ।

(१४) $१२७ - \frac{६}{६५} = \frac{८२४९}{६५}$ ।

(१५) $१४५ - \frac{२९}{८३} = \frac{१२००६}{८३}$ ।

(१६) $१६७\frac{३}{९४} = \frac{१५७०१}{९४}$ ।

(१७) $१८४\frac{४४}{१०९} = \frac{२०१००}{१०९}$ ।

(१८) $२१४\frac{१०९}{१२८} = \frac{२७५०१}{१२८}$ ।

(१९) $२३७\frac{८१}{१३७} = \frac{३२५५०}{१३७}$ ।

(२०) $३७९ - \frac{८७}{२५३} = \frac{९५८००}{२५३}$ ।

(२१) $४२६\frac{११९}{२७५} = \frac{११७२६९}{२७५}$ ।

(२२) $४५९\frac{५}{३५७} = \frac{१६३८६८}{३५७}$ ।

(२३) $५२८\frac{३२२}{४३५} = \frac{२३०००२}{४३५}$ ।

(२४) $६३९ - \frac{१७}{५१८} = \frac{३३०९८५}{५१८}$ ।

(२५) $७५४\frac{१९}{६२५} = \frac{४७१२६९}{६२५}$ ।

(२६) $७८३\frac{५२९}{६९४} = \frac{५४३९३१}{६९४}$ ।

(२७) $८२६ - \frac{७९}{८४५} = \frac{६९७८९१}{८४५}$ ।

(२८) $८३९\frac{३५}{९२७} = \frac{७७७७८८}{९२७}$ ।

(२९) $९४७ - \frac{२९}{१२५३} = \frac{११८६५६२}{१२५३}$ ।

(३०) $१०९८\frac{११८}{२७०९} = \frac{२९७४६००}{२७०९}$ ।

१३५ । स्वांशानुबन्ध और स्वांशापवाह को उस के समान भागजाति का रूप देने का प्रकार ।

स्वांशानुबन्ध वा स्वांशापवाह में दूसरे विभाग के अंश को क्रम से उस के छेद में जोड़ वा घटा देओ । और उस योग वा अन्तर से पहिले विभाग के अंश को गुण देओ । गुणनफल अभीष्ट भागजाति का अंश होगा । और दोनों विभागों के छेदों का गुणनफल अभीष्ट भागजाति का छेद होगा ।

उदा० (१) $\frac{३}{५} + \frac{४}{७}$ स्व, और $\frac{३}{५} - \frac{४}{७}$ स्व, इस स्वांशानुबन्ध और स्वांशापवाह को भागजाति का रूप देओ ।

न्यास । $\frac{३}{५} + \frac{४}{७}$ स्व $= \frac{३ \times (७+४)}{५ \times ७} = \frac{३ \times ११}{३५} = \frac{३३}{३५}$ ।

और $\frac{३}{५} - \frac{४}{७}$ स्व $= \frac{३ \times (७-४)}{५ \times ७} = \frac{३ \times ३}{५ \times ७} = \frac{९}{३५}$ ।

इस प्रकार की उपपत्ति ।

$\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$ स्व, यह $\frac{3}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के $\frac{4}{7}$ इन दोनों का योग है और $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$ स्व, यह उन्हीं दोनों का अन्तर है ।

परंतु $\frac{3}{5}$ के $\frac{4}{7}=\frac{3\times4}{5\times7}=\frac{12}{35}$ । प्र॰ (१३२)

और $\frac{3}{5}=\frac{3\times7}{5\times7}=\frac{21}{35}$ । प्र॰ (१२५)

$\therefore$ $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$ स्व, यह $\frac{21}{35}$ और $\frac{12}{35}$ इन का योग है ।

और $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$ स्व, यह $\frac{21}{35}$ और $\frac{12}{35}$ इन का अन्तर है ।

अब १ के ३५ वे भाग २१ और वे ही भाग १२ इन के योग में अवश्य वे ही भाग ३३ होंगे अर्थात् $\frac{21+12}{35}=\frac{33}{35}$ और उन्हीं २१ और १२ भागों के अन्तर में वे ही भाग ९ होंगे अर्थात् $\frac{21-12}{35}=\frac{9}{35}$

$\therefore$ $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$ स्व $=\frac{21+12}{35}$ और $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$ स्व $=\frac{21-12}{35}$ ।

परंतु ऊपर दिखलाया है कि २१ = ३ × ७, १२ = ३ × ४ और ३५ = ५ × ७ यों २१, १२ और ३५ सिद्ध हुए हैं ।

$\therefore$ $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$ स्व $=\frac{21+12}{35}=\frac{3\times7+3\times4}{5\times7}=\frac{3\times(7+4)}{5\times7}$ । प्र॰ (४४) सि॰ २

और $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$ स्व $=\frac{21-12}{35}=\frac{3\times7-3\times4}{5\times7}=\frac{3(7-4)}{5\times7}$ । प्र॰ (४४) सि॰ २ अनु॰

इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

उदा॰ (२) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ स्व, और $\frac{2}{7}-\frac{1}{8}$ स्व, इन को भागजाति का रूप देओ ।

न्यास । $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ स्व $=\frac{3(6+5)}{4\times6}=\frac{3\times11}{4\times6}=\frac{1'\times11'}{2'\times3'}=\frac{11}{6}=1\frac{1}{6}$ ।

और $\frac{2}{7}-\frac{1}{8}$ स्व $=\frac{2(8-1)}{7\times8}=\frac{2\times7}{7\times8}=\frac{1'\times1'}{1'\times4'}=\frac{1}{4}$ ।

यहां अंश और छेद में अपवर्तन किया है और अपवर्तित संख्या को स्थापित किया है । यों लाघव के लिये अंश और छेद में सर्वत्र अपवर्तन करो ।

उदा॰ (३) $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$ स्व $-\frac{1}{8}$ स्व, इस को भागजाति का रूप देओ ।

यहां पहिले $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$ स्व $=\frac{1(7+2)}{3\times7}=\frac{1\times9}{3\times7}=\frac{1\times3'}{1'\times7}=\frac{3}{7}$ ।

फिर, $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$ स्व $-\frac{1}{8}$ स्व $=\frac{3}{7}-\frac{1}{8}$ स्व $=\frac{3\times7}{7\times8}=\frac{3\times1'}{1'\times8}=\frac{3}{8}$ ।

अथवा एक हि बार सब गणित करने से,

$$\frac{१}{३}+\frac{२}{७}\text{स्व}-\frac{१}{८}\text{स्व}=\frac{१(७+२)(८-१)}{३\times७\times८}=\frac{१\times९\times७}{३\times७\times८}=\frac{१\times३'\times१'}{१'\times१'\times८}=\frac{३}{८}\text{ ।}$$

इस ऊपर के तीसरे उदाहरण के गणित के प्रकारान्तर को देखने से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि पहिले $\frac{१}{३}$ के $\frac{२}{७}$ को $\frac{१}{३}$ में जोड़ के जो फल होगा उस में उसी के $\frac{१}{८}$ को घटा देओ तो फल $\frac{३}{८}$ होता है । अथवा पहिले $\frac{१}{३}$ के $\frac{१}{८}$ को $\frac{१}{३}$ में घटा के जो फल होगा उस में उसी के $\frac{२}{७}$ जोड़ देओ तो भी फल उतना हि अर्थात् $\frac{३}{८}$ हि होता है । ऐसा हि सर्वत्र जानो ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{१}{२}+\frac{२}{३}\text{स्व}=\frac{५}{६}$ । (२) $\frac{२}{५}+\frac{१}{४}\text{स्व}=\frac{१}{२}$ ।

(३) $\frac{४}{७}+\frac{१}{६}\text{स्व}=\frac{२}{३}$ । (४) $\frac{११}{१२}+\frac{५}{१९}\text{स्व}=१\frac{३}{१९}$ ।

(५) $\frac{२}{३}-\frac{३}{५}\text{स्व}=\frac{४}{१५}$ । (६) $\frac{३}{४}-\frac{५}{९}\text{स्व}=\frac{१}{३}$ ।

(७) $\frac{५}{८}-\frac{७}{१५}\text{स्व}=\frac{१}{३}$ । (८) $\frac{३}{२}-\frac{१}{३}\text{स्व}=१$ ।

(९) $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}\text{स्व}+\frac{१}{४}\text{स्व}=\frac{५}{६}$ । (१०) $\frac{१}{५}+\frac{१}{४}\text{स्व}+\frac{१}{३}\text{स्व}=\frac{१}{३}$ ।

(११) $\frac{३}{७}+\frac{२}{५}\text{स्व}+\frac{१}{४}\text{स्व}=\frac{३}{४}$ । (१२) $\frac{४}{५}-\frac{२}{७}\text{स्व}-\frac{१}{८}\text{स्व}=\frac{१}{२}$ ।

(१३) $\frac{४}{७}-\frac{३}{१०}\text{स्व}-\frac{७}{१२}\text{स्व}=\frac{१}{६}$ । (१४) $\frac{१७}{१८}-\frac{५}{११}\text{स्व}-\frac{६}{१७}\text{स्व}=\frac{१}{३}$ ।

(१५) $\frac{११}{१३}+\frac{५}{८}\text{स्व}-\frac{३}{११}\text{स्व}=१$ । (१६) $\frac{८}{९}-\frac{५}{१४}\text{स्व}+\frac{३}{४}\text{स्व}=१$ ।

(१७) $\frac{१५}{२२}+\frac{१३}{१८}\text{स्व}-\frac{६}{३१}\text{स्व}=\frac{५}{६}$ ।

(१८) $\frac{१}{२}-\frac{१}{३}\text{स्व}+\frac{१}{४}\text{स्व}-\frac{१}{५}\text{स्व}=\frac{१}{३}$ ।

(१९) $२७०+\frac{२}{३}\text{स्व}+\frac{२}{३}\text{स्व}+\frac{२}{३}\text{स्व}=१२५०$ ।

(२०) $\frac{१}{४}+\frac{१}{५}\text{स्व}+\frac{१}{६}\text{स्व}+\frac{१}{७}\text{स्व}+\frac{१}{८}\text{स्व}=\frac{९}{२०}$ ।

(२१) $\frac{१}{४}-\frac{१}{५}\text{स्व}-\frac{१}{६}\text{स्व}-\frac{१}{७}\text{स्व}-\frac{१}{८}\text{स्व}=\frac{१}{८}$ ।

(२२) $२०-\frac{१}{२०}\text{स्व}-\frac{१}{२०}\text{स्व}-\frac{१}{२०}\text{स्व}-\frac{१}{२०}\text{स्व}-\frac{१}{२०}\text{स्व}=१५\frac{७६०९९}{१६००००}$

(२३) $१००००+\frac{१}{२५}\text{स्व}+\frac{१}{२५}\text{स्व}+\frac{१}{२५}\text{स्व}+\frac{१}{२५}\text{स्व}=११६९८\frac{३६६}{६२५}$ ।

(२४) $\frac{११}{१५} - \frac{१}{१६}$ स्व $- \frac{१}{१७}$ स्व $- \frac{१}{१८}$ स्व $- \frac{१}{१९}$ स्व $- \frac{१}{२०}$ स्व $- \frac{१}{२१}$ स्व $- \frac{१}{२२}$ स्व $= \frac{१}{२}$ ।

(२५) $\frac{८}{१५} + \frac{१}{१४}$ स्व $+ \frac{१}{१३}$ स्व $+ \frac{१}{१२}$ स्व $+ \frac{१}{११}$ स्व $+ \frac{१}{१०}$ स्व $+ \frac{१}{९}$ स्व $+ \frac{१}{८}$ स्व $= १$ ।

(२६) $\frac{१}{२} + \frac{१}{६}$ स्व $= \frac{७}{२२} + \frac{५}{६}$ स्व $= \frac{१}{५} + \frac{२}{३}$ स्व $+ \frac{३}{४}$ स्व $= \frac{७}{१२}$ ।

१३६ । भिन्न भागजाति संख्या को उस के समान भागजाति का रूप देने का प्रकार ।

अंश और छेद इन दोनों के छेदों से परस्पर के अंशों को गुण देओ तब अंशस्थान में जो फल होगा सो अभीष्ट भागजाति का अंश होगा और छेदस्थान में जो फल होगा सो अभीष्ट भागजाति का छेद होगा ।

यहां उद्दिष्ट संख्या के अंश और छेद जो भागजाति न हों तो उन को पहिले भागजाति का रूप देओ तब ऊपर की क्रिया करो ।

उदा० । $\dfrac{\frac{१}{३}}{\frac{४}{५}}$ इस भिन्न भागजाति संख्या को भाग जाति का रूप देओ ।

न्यास । $\dfrac{\frac{१}{३}}{\frac{४}{५}} = \frac{१ \times ५}{४ \times ३} = \frac{५}{१२}$ यह अभीष्ट रूप है ।

इस प्रकार की उपपत्ति । जब कि भिन्न संख्या का अंश भाज्य और छेद भाजक है तब $\dfrac{\frac{१}{३}}{\frac{४}{५}} = \frac{१}{३} \div \frac{४}{५}$ यह है अर्थात् $\frac{१}{३}$ में $\frac{४}{५}$ का भाग देने से जो लब्धि होगी सो इस भिन्न भागजाति का मान है । अब किसी संख्या में ४ का भाग देने से जो लब्धि आवेगी उस से उसी संख्या में $\frac{४}{५}$ का भाग देने से जो लब्धि आवेगी सो पञ्चगुण होगी यह अति स्पष्ट है । क्योंकि $\frac{४}{५}$ यह ४ का पञ्चमांश है ।

परंतु $\frac{१}{३} \div ४ = \frac{१}{३ \times ४}$ । प्र० (१२७) $\therefore \frac{१}{३} \div \frac{४}{५} = \frac{१}{३ \times ४} \times ५ = \frac{१ \times ५}{३ \times ४}$ ।

$\therefore \quad \dfrac{\frac{१}{३}}{\frac{४}{५}} = \dfrac{१ \times ५}{३ \times ४}$ यों उपपन्न हुआ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\dfrac{\frac{१}{२}}{\frac{२}{३}} = \dfrac{३}{४}$ । (२) $\dfrac{\frac{३}{४}}{\frac{५}{६}} = \dfrac{९}{१०}$ । (३) $\dfrac{\frac{५}{८}}{\frac{१५}{१६}} = \dfrac{२}{३}$ ।

(४) $\dfrac{\frac{१५}{२८}}{\frac{१०}{२१}} = १\dfrac{१}{८}$ । (५) $\dfrac{७}{\frac{३}{४}} = ९\dfrac{१}{३}$ । (६) $\dfrac{\frac{५}{८}}{३} = \dfrac{५}{२४}$ ।

(७) $\dfrac{३\frac{१}{४}}{५} = \dfrac{१३}{२०}$ । (८) $\dfrac{७}{४\frac{२}{३}} = १\dfrac{१}{२}$ । (९) $\dfrac{२}{३ - \frac{१}{२}} = \dfrac{४}{५}$ ।

(१०) $\dfrac{६ - \frac{३}{४}}{७} = \dfrac{३}{४}$ । (११) $\dfrac{\frac{४}{५} \text{ के } \frac{३}{८}}{६} = \dfrac{१}{२०}$ । (१२) $\dfrac{१४}{७ \text{ के } \frac{८}{९}} = २\dfrac{१}{४}$ ।

(१३) $\dfrac{४}{\frac{५}{६} + \frac{२}{७}\text{स्व}} = ७$ । (१४) $\dfrac{\frac{३}{४} - \frac{५}{२१}\text{स्व}}{४} = \dfrac{१}{७}$ ।

(१५) $\dfrac{\frac{७}{१८}}{५\frac{३}{८}} = \dfrac{२८}{३८७}$ । (१६) $\dfrac{१४ - \frac{१}{२}}{\frac{३}{१०}} = ४५$ ।

(१७) $\dfrac{\frac{५}{१२}}{\frac{२}{७} \text{ के } \frac{३}{४}} = १\dfrac{१७}{१८}$ । (१८) $\dfrac{\frac{२}{५} + \frac{३}{७}\text{स्व}}{\frac{२}{७}} = २$ ।

(१९) $\dfrac{\frac{५}{६}}{\frac{२}{३} - \frac{१}{८}\text{स्व} - \frac{३}{७}\text{स्व}} = २\dfrac{१}{२}$ । (२०) $\dfrac{३\frac{१}{४}}{५\frac{१}{३}} = \dfrac{३९}{६४}$ ।

(२१) $\dfrac{१३\frac{७}{९}}{६ - \frac{५}{६}} = २\dfrac{२}{३}$ । (२२) $\dfrac{\frac{३}{४} \text{ के } \frac{४}{५} \text{ के } \frac{५}{७}}{२\frac{११}{१४}} = \dfrac{२}{१३}$ ।

(२३) $\dfrac{\frac{१}{४}+\frac{१}{३}\text{स्व}+\frac{१}{२}\text{स्व}}{५\frac{३}{४}} = \frac{२}{२३}$ । (२४) $\dfrac{१७\frac{२}{३}}{\frac{१}{२}-\frac{१}{८}\text{स्व}+\frac{६}{७}\text{स्व}} = १७\frac{२}{३}$ ।

(२५) $\dfrac{८-\frac{२}{५}}{२-\frac{१}{१०}} = ४$ । (२६) $\dfrac{\frac{२}{३}\text{ के }\frac{६}{७}\text{ के }\frac{११}{१२}}{१३-\frac{७}{९}} = \frac{३}{७०}$ ।

(२७) $\dfrac{७-\frac{५}{११}}{\frac{८}{९}+\frac{२}{७}\text{स्व}+\frac{३}{४}\text{स्व}} = ३\frac{३}{११}$ । (२८) $\dfrac{\frac{६}{७}-\frac{३}{१०}\text{स्व}}{४-\frac{१}{७}} = \frac{७}{४५}$ ।

(२९) $\dfrac{\frac{४}{७}\text{ के }\frac{७}{१०}\text{ के }\frac{१०}{१३}}{\frac{५}{६}\text{ के }\frac{६}{७}\text{ के }\frac{७}{८}} = \frac{३२}{६५}$ । (३०) $\dfrac{\frac{५}{९}+\frac{४}{५}\text{स्व}}{\frac{५}{९}\text{ के }\frac{४}{५}} = २\frac{१}{४}$ ।

(३१) $\dfrac{\frac{३}{४}\text{ के }\frac{५}{६}\text{ के }\frac{८}{९}}{\frac{६}{७}-\frac{५}{१२}\text{स्व}+\frac{१}{२}\text{स्व}} = \frac{२०}{२७}$ । (३२) $\dfrac{\frac{१}{३}+\frac{१}{४}\text{स्व}+\frac{१}{५}\text{स्व}}{\frac{२}{७}+\frac{३}{४}\text{स्व}+\frac{५}{९}\text{स्व}} = \frac{९}{१४}$ ।

(३३) $\dfrac{\frac{५}{८}-\frac{३}{११}\text{स्व}+\frac{७}{१५}\text{स्व}}{\frac{३}{७}-\frac{१}{८}\text{स्व}-\frac{१}{९}\text{स्व}} = २$ ।

१३७। दो वा अनेक भागजाति भिन्न संख्याओं को उन के समान समच्छेद करने का प्रकार । अर्थात् उन भिन्न संख्याओं को ऐसा रूप देने का प्रकार कि जिस रूप में उन सभों के छेद परस्पर समान होवें ।

उद्दिष्ट संख्याओं के हर एक अंश को उस का छेद छोड के और छेदों से गुण देओ । वे गुणनफल अभीष्ट अंश होंगे और सब छेदों का गुणनफल करो वही सब अंशों का छेद होगा ।

यहां देखो कि उद्दिष्ट संख्याओं में जो कोई और जाति की भिन्न संख्या हो तो उन को पहिले भागजाति का रूप देओ और सब भागजातिओं को लघुतम रूप देके तब उन को समच्छेद करो ।

उदा० । $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$ और $\frac{३}{५}$ इन को समच्छेद करो ।

न्यास । $\left.\begin{array}{l} १\times३\times५=१५ \\ २\times२\times५=२० \\ ३\times२\times३=१८ \end{array}\right\}$ ये तीन क्रम से अभीष्ट अंश हैं ।

और $२ \times ३ \times ५ = ३०$ यह समच्छेद है ।

$\therefore \frac{१५}{३०}, \frac{२०}{३०}$ और $\frac{१८}{३०}$ ये अभीष्ट समच्छेद संख्या हैं ।

अथवा यों न्यास करो ।

$\frac{१}{२}, \frac{२}{३}$ और $\frac{३}{५}$ ये उद्दिष्ट भागजाति हैं ।

$$\left.\begin{aligned} \text{तब } \frac{१}{२} &= \frac{१ \times ३ \times ५}{२ \times ३ \times ५} = \frac{१५}{३०} \\ \frac{२}{३} &= \frac{२ \times २ \times ५}{२ \times ३ \times ५} = \frac{२०}{३०} \\ \frac{३}{५} &= \frac{३ \times २ \times ३}{२ \times ३ \times ५} = \frac{१८}{३०} \end{aligned}\right\} \text{यों समच्छेद हुए ।}$$

अथवा जो उद्दिष्ट भागजातिओं के छेदों में कोइ दो छेद परस्पर अदृढ हों तो सब छेदों के लघुतमापवर्त्य में हर एक छेद का अलग २ भाग देओ। और उस २ छेद के लब्धि से उसके २ अंश को गुण देओ। वे गुणनफल क्रम से अभीष्ट अंश होंगे और लघुतमापवर्त्य हि सभों का छेद होगा। इस प्रकार से उद्दिष्ट संख्या छोटे अङ्कों में समच्छेद होंगी ।

उदा० । $\frac{३}{४}, \frac{५}{६}$ और $\frac{७}{९}$ इन को समच्छेद करो ।

यहां छेदों के लघुतमापवर्त्य के लिये न्यास :

$$\begin{array}{r|l} २ & ४,\ ६,\ ९ \\ \hline & २,\ ३,\ ९ \end{array}$$

$\therefore$ $२ \times २ \times ९ = ३६$ यह छेदों का लघुतमापवर्त्य है ।

अब $\frac{३६}{४} = ९, \frac{३६}{६} = ६$ और $\frac{३६}{९} = ४$ ।

$$\therefore \left.\begin{aligned} \frac{३}{४} &= \frac{३ \times ९}{३६} = \frac{२७}{३६} \\ \frac{५}{६} &= \frac{५ \times ६}{३६} = \frac{३०}{३६} \\ \text{और } \frac{७}{९} &= \frac{७ \times ४}{३६} = \frac{२८}{३६} \end{aligned}\right\} \text{ये उद्दिष्ट संख्या समच्छेद हुईं ।}$$

समच्छेद करने के दोनों प्रकारों की उपपत्ति (१२५) वे प्रक्रम से अतिस्पष्ट है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{३}{५}$ और $\frac{४}{७}$ इन के समान समच्छेद $\frac{२१}{३५}$ और $\frac{२०}{३५}$ ।

(२) $\frac{३}{४}, \frac{४}{५}$ और $\frac{५}{६} = \frac{४५}{६०}, \frac{४८}{६०}$ और $\frac{५०}{६०}$ ।

(३) $\frac{५}{८}$ और $\frac{११}{१२} = \frac{१५}{२४}$ और $\frac{२२}{२४}$ ।

(४) $\frac{५}{७}, \frac{७}{९}$ और $\frac{११}{१४} = \frac{९०}{१२६}, \frac{९८}{१२६}$ और $\frac{९९}{१२६}$ ।

(५) $\frac{८}{१३}$ और $\frac{१७}{२६} = \frac{१६}{२६}$ और $\frac{१७}{२६}$ ।

(६) $\frac{३}{५}, \frac{१३}{१५}$ और $\frac{२३}{२५} = \frac{४५}{७५}, \frac{६५}{७५}$ और $\frac{६९}{७५}$ ।

(७) $\frac{२}{२१}$ और $\frac{३}{४९} = \frac{१४}{१४७}$ और $\frac{९}{१४७}$ ।

(८) $\frac{३}{५}, \frac{५}{७}, \frac{४}{९}$ और $\frac{२}{११} = \frac{२०७९}{३४६५}, \frac{२४७५}{३४६५}, \frac{१५४०}{३४६५}$ और $\frac{६३०}{३४६५}$ ।

(९) $\frac{५}{६}, \frac{७}{१०}$ और $\frac{८}{१५} = \frac{७५}{९०}, \frac{६३}{९०}$ और $\frac{४८}{९०}$ ।

(१०) $\frac{१३}{१५}, \frac{१०}{२१}$ और $\frac{१२}{३५} = \frac{९१}{१०५}, \frac{५०}{१०५}$ और $\frac{३६}{१०५}$ ।

(११) $४, \frac{२}{५}, \frac{१}{६}$ और $\frac{७}{९} = \frac{३६०}{९०}, \frac{३६}{९०}, \frac{१५}{९०}$ और $\frac{७०}{९०}$ ।

(१२) $\frac{५}{१४}, \frac{२}{२१}$ और $\frac{१३}{३५} = \frac{७५}{२१०}, \frac{२०}{२१०}$ और $\frac{७८}{२१०}$ ।

(१३) $\frac{७}{१२}, \frac{९}{१६}, \frac{१३}{२०}$ और $\frac{५}{२७} = \frac{१२६०}{२१६०}, \frac{१२१५}{२१६०}, \frac{१४०४}{२१६०}$ और $\frac{४००}{२१६०}$ ।

(१४) $\frac{८}{३५}, \frac{७}{४०}$ और $\frac{५}{५६} = \frac{६४}{२८०}, \frac{४९}{२८०}$ और $\frac{२५}{२८०}$ ।

(१५) $\frac{७}{१८}, \frac{९}{२२}, \frac{११}{६३}$ और $\frac{२}{७७} = \frac{५३९}{१३८६}, \frac{५६७}{१३८६}, \frac{२४२}{१३८६}$ और $\frac{३६}{१३८६}$ ।

(१६) $\frac{१७}{१४३}, \frac{१४}{६५}, \frac{१२}{५५}$ और $\frac{११}{५२} = \frac{३४०}{२८६०}, \frac{६१६}{२८६०}, \frac{६२४}{२८६०}$ और $\frac{६०५}{२८६०}$ ।

(१७) $\frac{१५}{७२}, \frac{९}{१०४}, \frac{८}{११७}, \frac{१३}{१२०}$ और $\frac{१७}{१३५} = \frac{२९२५}{१४०४०}, \frac{१२१५}{१४०४०}, \frac{९६०}{१४०४०},$
$\frac{१५२१}{१४०१४०}$ और $\frac{१७६८}{१४०४०}$ ।

(१८) $\frac{११}{१२}, \frac{१२}{१३}, \frac{१३}{१४}, \frac{१४}{१५},$ और $\frac{१५}{१६} = \frac{२००२०}{२१८४०}, \frac{२०१६०}{२१८४०}, \frac{२०२८०}{२१८४०}, \frac{२०३८४}{२१८४०}$
और $\frac{२०४७५}{२१८४०}$ ।

(१९) $३, \frac{१४}{१९५}, \frac{१५}{२२१}$ और $\frac{१६}{२५५} = \frac{९९४५}{३३१५}, \frac{२३८}{३३१५}, \frac{२२५}{३३१५}$ और $\frac{२०८}{३३१५}$ ।

(२०) $\frac{१}{४२}, \frac{१}{४५}, \frac{१}{४८}, \frac{१}{५४}, \frac{१}{५६}, \frac{१}{६३}$ और $\frac{१}{७२}$
$= \frac{३६०}{१५१२०}, \frac{३३६}{१५१२०}, \frac{३१५}{१५१२०}, \frac{२८०}{१५१२०}, \frac{२७०}{१५१२०}, \frac{२४०}{१५१२०},$ और $\frac{२१०}{१५१२०}$ ।

(२१) $\frac{१९}{८८}, \frac{२३}{१०४}, \frac{२५}{१३६}, \frac{२७}{१४३}, \frac{२९}{१८७}$ और $\frac{३१}{२२१}$

$= \frac{४१९९}{१९४४८}, \frac{४३०१}{१९४४८}, \frac{३५७५}{१९४४८}, \frac{३६७२}{१९४४८}, \frac{३०१६}{१९४४८}$ और $\frac{२७२८}{१९४४८}$ ।

(२२) $\frac{१२१}{२१०}, \frac{४९}{३३०}, \frac{२५}{४६२}, \frac{९}{७७०}$ और $\frac{४}{११५५}$

$= \frac{१३३१}{२३१०}, \frac{३४३}{२३१०}, \frac{१२५}{२३१०}, \frac{२७}{२३१०}$ और $\frac{८}{२३१०}$ ।

१३८ । अनुमान । भिन्न संख्याओं को समच्छेद करने से उन का न्यूनाधिकभाव अर्थात् उन में कौन किस से छोटी वा बड़ी है यह स्पष्ट प्रकाशित होता है ।

सो इस प्रकार से । समच्छेद संख्याओं के छेद की जो संख्या होगी उतने १ के समान विभाग कल्पना करके उन तुल्य विभागों से उन संख्याओं के अंशों की जितनी २ संख्या होंगी उतने २ विभाग लेओ वेही उन संख्याओं के मान हैं प्र॰ (१२४) । तब स्पष्ट है कि उन समच्छेद संख्याओं में जिस के अंश की संख्या छोटी वा बड़ी होगी उस के अनुसार उस संख्या का मान छोटा वा बड़ा होगा ।

उदा॰ । $\frac{७}{८}, \frac{८}{९}, \frac{१३}{१५}, \frac{१७}{२०}$ और $\frac{२३}{२७}$ इन संख्याओं का न्यूनाधिकभाव कहो ।

यहां छेदों के लघुतमापवर्त्य के लिये न्यास ।

```
२) ८, ९, १५, २०, २७
२) ४     १५  १०  २७
३) २     १५   ५  २७
   २      ५       ९
```

∴ २ × २ × ३ × २ × ५ × ९ = १०८० यह छेदों का लघुतमापवर्त्य है ।

अब $\frac{१०८०}{८} = १३५, \frac{१०८०}{९} = १२०, \frac{१०८०}{१५} = ७२, \frac{१०८०}{२०} = ५४$

और $\frac{१०८०}{२७} = ४०$ ।

∴ $\frac{७}{८} = \frac{७ \times १३५}{१०८०} = \frac{९४५}{१०८०}$ ।

$\frac{८}{९} = \frac{८ \times १२०}{१०८०} = \frac{९६०}{१०८०}$ ।

$\frac{१३}{१५} = \frac{१३ \times ७२}{१०८०} = \frac{९३६}{१०८०}$ ।

$$\frac{१७}{२०} = \frac{१७ \times ५४}{१०८०} = \frac{९१८}{१०८०} ।$$

और $$\frac{२३}{२७} = \frac{२३ \times ४०}{१०८०} = \frac{९२०}{१०८०} ।$$

इस लिये उद्दिष्ट संख्याओं में सब से छोटी संख्या $\frac{१७}{२०}$ है और इस से बड़ी $\frac{२३}{२७}$ है। इसी भांति और भी। और सब से बड़ी संख्या $\frac{८}{९}$ है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

नीचे के हर एक उदाहरण में लिखी हुई भिन्न संख्याओं का न्यूनाधिकभाव दिखलाने के लिये उन में पहिली, दूसरी, तीसरी इत्यादि संख्याओं के द्योतक क्रम से १, २, ३ इत्यादि अङ्क कल्पना कर के उन संख्याओं के सामने इस क्रम से लिख दिये हैं कि उन में जो संख्या सब से छोटी है उस का द्योतक अङ्क पहिले लिख के फिर उस से उत्तरोत्तर बड़ी संख्याओं के द्योतक अङ्क क्रम से लिखे हैं।

(१) $\frac{४}{५}$ और $\frac{८}{९}$। १, २।

(२) $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{५}$ और $\frac{३}{८}$। २, ४, ३, १।

(३) $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{५}{१२}$ और $\frac{८}{१९}$। १, ३, ४, २।

(४) $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{८}{११}$, $\frac{११}{१५}$ और $\frac{१९}{२६}$। १, ३, ५, ४, २।

(५) $\frac{३}{४}$ के $\frac{८}{१५}$, $\frac{३}{७}$ और $\frac{२}{३}$ के $\frac{५}{८}$। १, ३, २।

(६) $२\frac{१}{२}$ के $\frac{४}{५}$, $२\frac{१}{३}$, ८ के $\frac{२}{७}$ और $२\frac{३}{१०}$। १, ३, ४, २।

(७) $३\frac{२}{३}$ के $\frac{२}{१३}$, $\frac{५}{१३} + \frac{४}{७}$ स्व और $\frac{१०}{२१}$। ३, १, २।

(८) $\frac{२}{७}$, $\frac{३}{११}$, $\frac{५}{६}$ का $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२} - \frac{१३}{२९}$ स्व, और $\frac{१}{५} + \frac{१८}{४७}$ स्व।

२, ४, ५, ३, १।

(९) $\frac{५}{६}$, $\frac{१}{२} + \frac{४}{७}$ स्व, $१\frac{१}{३} - \frac{९}{२८}$ स्व, $\frac{१७}{२२}$, $२\frac{१}{३}$ के $\frac{४}{११}$ और $\frac{५}{११}$ के $\frac{४}{७}$।

४, २, ६, १, ५, ३।

(१०) $\frac{१}{५}$, $\frac{२}{९}$, $\frac{३}{१४}$, $\frac{५}{२३}$ और $\frac{८}{३७}$। १, ३, ५, ४, २।

(११) $\frac{११}{३०}$, $\frac{१६}{३५}$, $\frac{१७}{४०}$, $\frac{१९}{४२}$, $\frac{२३}{४८}$ और $\frac{२५}{५६}$। ३, १, ६, ४, २, ५।

(१२) $\frac{२}{५}, \frac{५}{१२}, \frac{७}{१७}, \frac{१२}{२६}$ और $\frac{१६}{४६}$ इन में कौन २ संख्या $\frac{३१}{७५}$ इस संख्या से बड़ी है और कौन २ छोटी है?

उत्तर, पहिली, तीसरी और पांचवीं संख्या छोटी हैं और चौथी और दूसरी बड़ी है।

(१३) $\frac{३}{४}, \frac{४}{५}, \frac{७}{६}, \frac{११}{१४}$ और $\frac{१८}{२३}$ इन में कौन २ संख्या $\frac{२६}{३७}$ इस से बड़ी और कौन २ छोटी है?

उत्तर, चौथी और दूसरी बड़ी हैं और पहिली, तीसरी और पांचवी छोटी हैं।

(१४) $\frac{४}{७}, \frac{५}{६}, \frac{६}{१६}, \frac{१४}{२५}, \frac{२३}{४१}$ और $\frac{३७}{६६}$ इन में सब से बड़ी संख्या कौन है और छोटी कौन है?

उत्तर। $\frac{४}{७}$ सब से बड़ी है और $\frac{५}{६}$ सब से छोटी है।

(१५) $\frac{८}{२१}, \frac{१३}{३३}, \frac{१४}{३६}, \frac{१७}{४५}, \frac{२६}{७७}, \frac{३४}{६१}$ और $\frac{४१}{१०५}$ इन में सब से बड़ी और छोटी संख्या कौन है?

उत्तर। $\frac{१३}{३३}$ सब से बड़ी है और $\frac{१४}{३६}$ सब से छोटी है।

१३९। इस भिन्न संख्याओं के गणित में यहां तक उन के संकलन, व्यवकलन, इत्यादि छ परिकर्मों का उपयोगि गणित दिखलाया। अब वे छ परिकर्म क्रम से लिखते हैं। इन सभों में पहिले उद्दिष्ट संख्याओं को भागजाति का रूप और लघुतम रूप देओ। और सभों में अन्त में जो फल उत्पन्न होगा उस को लघुतम रूप देओ और उस लघुतम रूप में जो स्थूल संख्या हो तो उस को भागानुबन्ध का रूप देओ।

३ भिन्न संख्याओं का संकलन।

१४०। रीति। उद्दिष्ट संख्याओं को समच्छेद करो। और समच्छेद संख्याओं के अंशों का योग करो सो अभीष्ट योग का अंश होगा और जो समच्छेद संख्याओं का छेद हो वही अभीष्ट योग का छेद होगा।

उदा० (१) $\frac{१}{४}$ और $\frac{३}{८}$ इन का योग करो।

यहां उद्दिष्ट संख्याओं को समच्छेद करने के लिये छेदों का लघुतमापवर्त्य ८ है।

तब $\frac{८}{४} = २$ और $\frac{८}{८} = १$

$\therefore \quad \frac{१}{४} = \frac{१ \times २}{८} = \frac{२}{८}$

और $\frac{३}{८} = \frac{३ \times १}{८} = \frac{३}{८}$

$\therefore \quad \frac{१}{४} + \frac{३}{८} = \frac{२}{८} + \frac{३}{८} = \frac{२+३}{८} = \frac{५}{८}$ यह योग है।

उदा० (२) $\frac{९}{१४}, \frac{१३}{१८}$ और $\frac{६१}{६३}$ इन का योग करो।

यहां पहिले संख्याओं को समच्छेद करने के लिये न्यास।

$$\begin{array}{r|lll} २ & १४, & १८, & ६३ \\ \hline & ७ & ९ & ६३ \end{array}$$

$\therefore \quad २ \times ६३ = १२६$ यह छेदों का लघुतमापवर्त्य है।

अब $\frac{१२६}{१४} = ९, \frac{१२६}{१८} = ७$ और $\frac{१२६}{६३} = २$।

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \quad \frac{९}{१४} = \frac{९ \times ९}{१२६} = \frac{८१}{१२६}। \\ \quad\;\; \frac{१३}{१८} = \frac{१३ \times ७}{१२६} = \frac{९१}{१२६}। \\ \text{और } \frac{६१}{६३} = \frac{६१ \times २}{१२६} = \frac{१२२}{१२६}। \end{array}\right\}$$ यों समच्छेद संख्या हुईं।

इस लिये $\frac{९}{१४} + \frac{१३}{१८} + \frac{६१}{६३} = \frac{८१}{१२६} + \frac{९१}{१२६} + \frac{१२२}{१२६}$

$= \frac{८१ + ९१ + १२२}{१२६}$

$= \frac{२९४}{१२६} = \frac{७}{३} = २\frac{१}{३}$ यह अभीष्ट योग है।

भिन्न संकलन की उपपत्ति।

जब भिन्न संख्याओं को समच्छेद करते हो तब उन के अंश सब सजातीय अर्थात् एक जाति के हो जाते हैं।

जैसा। एक रुपये का $\frac{१}{४}$ और $\frac{३}{८}$ इन का योग करना है तब इस में स्पष्ट है कि पहिला अंश १ यह एक चौअन्नी है और दूसरा अंश ३ ये तीन दुअन्नी हैं। अब १ चौअन्नी और ३ दुअन्नी इन को संख्याओं का योग तो ४ है परंतु न तो ये ४ चौअन्नी हैं न दुअन्नी हैं क्यों कि ये विजातीय संख्या हैं। इस लिये इन का योग नहीं हो सकता। और $\frac{१}{४}$ और $\frac{३}{८}$ इन को जो समच्छेद करो तो $\frac{२}{८}$ और $\frac{३}{८}$ होते हैं तब इन में पहिला अंश २ (अष्टमांश) ये २ दुअन्नी हैं और दूसरा अंश ३ (अष्टमांश) ये भी ३ दुअन्नी हैं। इस से स्पष्ट है कि समच्छेद करने से अंश सजातीय हो जाते हैं।

तब २ दुअन्नी और ३ दुअन्नी इन का योग अवश्य ५ दुअन्नी होगा अर्थात् १ रुपये के ५ अष्टमांश होगा

$\therefore \frac{१}{४}+\frac{३}{८}=\frac{२}{८}+\frac{३}{८}=\frac{५}{८}$ यों उपपन्न हुआ ।

इसी प्रकार से दूसरे उदाहरण में १ के समान १२६ विभाग करने से वेही तुल्य विभाग ८१, ९१ और १२२ ये सब एक जाति के हो जाते हैं क्यों कि इन में एक २ विभाग परस्पर तुल्य हैं । इस लिये इन के योग में २९४ वेही तुल्य विभाग होंगे ।

$\therefore \frac{९}{१४}+\frac{१३}{१८}+\frac{६१}{६३}=\frac{८१+९१+१२२}{१२६}=\frac{२९४}{१२६}$ यह उपपन्न हुआ ।

उदा० (३) २, $\frac{५}{६}$, ३ $\frac{२}{९}$ और $\frac{११}{१५}$ इन का योग करो ।

यहां पहिले २ $=\frac{२}{१}$ और ३ $\frac{२}{९}=\frac{२९}{९}$ यों भागजाति का रूप देके

तब छेदों के लघुतममापवर्त्य के लिये न्यास ।

$$\begin{array}{r|lll} ३ & ६, & ९, & १५ \\ \hline & २ & ३ & ५ \end{array}$$

$\therefore$ ३ × २ × ३ × ५ = ९० यह छेदों का लघुतमापवर्त्य है ।

$\therefore \frac{९०}{१}=९०,\ \frac{९०}{६}=१५,\ \frac{९०}{९}=१०$ और $\frac{९०}{१५}=६$ ।

$\therefore २=\frac{२}{१}=\frac{२\times९०}{९०}=\frac{१८०}{९०},\ \frac{५}{६}=\frac{५\times१५}{९०}=\frac{७५}{९०},$

$३\frac{२}{९}=\frac{२९}{९}=\frac{२९\times१०}{९०}=\frac{२९०}{९०}$ और $\frac{११}{१५}=\frac{११\times६}{९०}=\frac{६६}{९०}$

$\therefore २+\frac{५}{६}+३\frac{२}{९}+\frac{११}{१५}=\frac{१८०+७५+२९०+६६}{९०}=\frac{६११}{९०}=६\frac{७१}{९०}$ यह योग है ।

अथवा उद्दिष्ट संख्याओं में जो कितनी एक अभिन्न संख्या वा भागानुबन्ध हों तब सब अभिन्न संख्याओं का अलग योग करो और भागजातिओं का अलग योग करो तब उन दोनों योगों का फिर योग करो वह अभीष्ट योग कुछ लाघव से होगा ।

जैसा । ऊपर के (३) रे उदाहरण में

$२+\frac{५}{६}+३\frac{२}{९}+\frac{११}{१५}=२+३+\frac{५}{६}+\frac{२}{९}+\frac{११}{१५}=५+\frac{५}{६}+\frac{२}{९}+\frac{११}{१५}$

अब इस में $\frac{५}{६}+\frac{२}{९}+\frac{११}{१५}=\frac{७५}{९०}+\frac{२०}{९०}+\frac{६६}{९०}=\frac{१६१}{९०}=१\frac{७१}{९०}$

$\therefore$ सब संख्याओं का योग $=५+१\frac{७१}{९०}=६\frac{७१}{९०}$ पूर्व योग के तुल्य योग हुआ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

यह सिद्ध करो कि

(१) $\frac{३}{५}+\frac{४}{५}=१\frac{२}{५}$ ।

(२) $\frac{२}{३}+\frac{३}{४}=१\frac{५}{१२}$ ।

(३) $\frac{१}{४}+\frac{१}{६}=\frac{५}{१२}$ ।

(४) $\frac{२}{५}+\frac{३}{१०}=\frac{७}{१०}$ ।

(५) $\frac{५}{७}+\frac{३}{१४}=\frac{१३}{१४}$ ।

(६) $\frac{७}{१२}+\frac{१३}{१८}=१\frac{११}{३६}$ ।

(७) $\frac{७}{२४}+\frac{१}{४८}=\frac{५}{१६}$ ।

(८) $\frac{७}{१२}+\frac{१}{१५}=\frac{१३}{२०}$ ।

(९) $\frac{१३}{३०}+\frac{४}{३५}=\frac{२३}{४२}$ ।

(१०) $\frac{३}{१४}+\frac{४}{६३}=\frac{५}{१८}$ ।

(११) $\frac{३}{१६}+\frac{५}{१८}=\frac{६७}{१४४}$ ।

(१२) $\frac{१४}{१७}+\frac{३}{१९}=\frac{३१७}{३२३}$ ।

(१३) $७\frac{१}{३}+\frac{५}{६}=८\frac{१}{६}$ ।

(१४) $३\frac{२}{७}+५\frac{१}{४}=८\frac{१५}{२८}$ ।

(१५) $८\frac{२}{३}+९\frac{४}{५}=१८\frac{१}{१५}$ ।

(१६) $६\frac{३}{८}+\frac{२}{३}$ के $\frac{९}{१०}=६\frac{३९}{४०}$ ।

(१७) $७\frac{३}{५}$ के $\frac{१५}{१९}+(५\frac{३}{४}+\frac{७}{२३}$ स्व $)=१३\frac{१}{२}$ ।

(१८) $(८-\frac{१}{४})+\frac{३}{२}$ के $\frac{३}{२}=१०$ ।

(१९) $(\frac{१}{२}+\frac{१}{३}$ स्व $-\frac{१}{४}$ स्व $)+(९-\frac{१}{२})=९$ ।

(२०) $\frac{५}{७}+\frac{२\frac{१}{३}}{\frac{५}{६}}=३\frac{१८}{३५}$ ।

(२१) $\frac{१}{३}+\frac{१}{५}+\frac{१}{७}=\frac{७१}{१०५}$ ।

(२२) $\frac{१}{२}+\frac{३}{४}+\frac{५}{६}=२\frac{१}{१२}$ ।

(२३) $\frac{७}{८}+\frac{९}{१०}+\frac{११}{१२}=२\frac{८३}{१२०}$ ।

(२४) $\frac{१}{६}+\frac{३}{१०}+\frac{२}{१५}=\frac{३}{५}$ ।

(२५) $\frac{२}{१५}+\frac{५}{२१}+\frac{१२}{३५}=\frac{५}{७}$ ।

(२६) $\frac{१३}{३५}+\frac{२३}{४०}+\frac{३}{५६}=१$ ।

(२७) $\frac{४}{७}+\frac{१}{२४}+\frac{३}{५६}=\frac{२}{३}$ ।

(२८) $\frac{१}{१०}+\frac{५}{१८}+\frac{८}{४५}=\frac{५}{९}$ ।

(२९) $\frac{१}{२१}+\frac{१}{३३}+\frac{५}{७७}=\frac{१}{७}$ ।

(३०) $\frac{८}{२१}+\frac{५}{३३}+\frac{३}{७७}=\frac{४}{७}$ ।

(३१) $\frac{१}{१८}+\frac{१}{२२}+\frac{८}{९९}=\frac{२}{११}$ ।

(३२) $\frac{१७}{१८}+\frac{२१}{२२}+\frac{९१}{९९}=२\frac{९}{११}$ ।

(३३) $\frac{५}{२१}+\frac{५}{३३}+\frac{१}{३५}+\frac{२१}{५५}=\frac{४}{५}$। (३४) $\frac{१}{३३}+\frac{२२}{३९}+\frac{५}{७७}+\frac{३}{९१}=\frac{९}{१३}$।

(३५) $\frac{१०४}{१०५}+\frac{१६३}{१६५}+\frac{२३०}{२३१}+\frac{३१८}{३८५}=३\frac{४}{५}$।

(३६) $१\frac{१}{२}+२\frac{२}{३}+३\frac{३}{४}+४\frac{४}{५}+५\frac{५}{६}=१८\frac{११}{२०}$।

(३७) $१०\frac{१}{७}+११\frac{१}{८}+१२\frac{१}{९}+१३\frac{१}{१०}+१४\frac{१}{१२}=६०\frac{१४१७}{२५२०}$।

(३८) $\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}+\frac{१}{३२}+\frac{१}{६४}+\frac{१}{१२८}+\frac{१}{२५६}=\frac{२५५}{२५६}$।

(३९) $\frac{४}{३}$ के $\frac{५}{७}$, $\frac{४३}{७}$ के $\frac{२}{१३}$ और $\frac{१}{३}+\frac{२४}{१३}$ स्व, इन तीनों का योग $=२\frac{११}{१३}$।

(४०) $२३-\frac{१}{६}$, $३७\frac{१}{३}$, $\frac{४}{५}$ के $\frac{५}{९}$ और $\frac{३}{४}+\frac{१}{५}$ स्व $-\frac{१}{६}$ स्व,

इन का योग $=६१\frac{१३}{३६}$।

(४१) यह नीचे एक योगचक्र लिखा है। इस में हर एक खड़ी, बेंडो, या कर्णाकार पंक्ति की भिन्न संख्याओं का योग $\frac{१}{१४०}$ होता है। इस प्रकार से इस में योग के आठ उदाहरण हैं।

$\frac{१}{५०४}$	$\frac{१}{६३०}$	$\frac{१}{२८०}$
$\frac{१}{२५२}$	$\frac{१}{४२०}$	$\frac{१}{१२६०}$
$\frac{१}{८४०}$	$\frac{१}{३१५}$	$\frac{१}{३६०}$

४ भिन्न संख्याओं का व्यवकलन ।

१४१ । रीति । जिन दो भिन्न संख्याओं का अन्तर करना हो उन को समच्छेद करो । तब समच्छेद संख्याओं के छोटे अंश को बड़े अंश में घटा देओ । जो शेष बचे सो अभीष्ट अन्तर का अंश होगा और समच्छेद उस का छेद होगा ।

उदा० (१) $\frac{१}{४}$ और $\frac{३}{८}$ इन का अन्तर करो ।

यहां उद्दिष्ट संख्याओं को समच्छेद करने से $\frac{२}{८}$ और $\frac{३}{८}$ ये संख्या होती हैं ।

इस से स्पष्ट है कि $\frac{१}{४}$ से $\frac{३}{८}$ यह संख्या बड़ी है ।

इसलिये $\frac{३}{८}-\frac{१}{४}=\frac{३}{८}-\frac{२}{८}=\frac{३-२}{८}=\frac{१}{८}$ यह अन्तर है ।

इस रीति की उपपत्ति।

जब कि अन्तर सजातीय संख्याओं का होता है और विजातीयों का नहीं और संख्याओं को समच्छेद करने से उन के अंश सजातीय होते हैं यह सब (१४०) वें प्रक्रम में संकलन की उपपत्ति में स्पष्ट दिखलाया है। इस लिये संख्याओं को पहिले समच्छेद कर के तब अंशों का अन्तर करना चाहिये।

उदा० (२) $\frac{१}{२} - \frac{१}{३} + \frac{१}{४}$ इस को सवर्णित करो।

यहां $\frac{१}{२} - \frac{१}{३} + \frac{१}{४} = \frac{६}{१२} - \frac{४}{१२} + \frac{३}{१२} = \frac{(६+३)-४}{१२} = \frac{९-४}{१२} = \frac{५}{१२}$।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $\frac{७}{९} - \frac{४}{९} = \frac{१}{३}$।

(२) $\frac{३}{४} - \frac{१}{२} = \frac{१}{४}$।

(३) $\frac{२}{३} - \frac{१}{६} = \frac{१}{२}$।

(४) $\frac{२}{५} - \frac{३}{८} = \frac{१}{४०}$।

(५) $\frac{५}{९} - \frac{७}{१३} = \frac{२}{११७}$।

(६) $\frac{३}{४} - \frac{१}{१२} = \frac{२}{३}$।

(७) $\frac{२}{२१} - \frac{१}{३५} = \frac{१}{१५}$।

(८) $\frac{७}{४५} - \frac{१}{१५} = \frac{१}{१०}$।

(९) $३\frac{१}{२} - २\frac{१}{३} = १\frac{१}{६}$।

(१०) $७\frac{१}{४} - ४\frac{२}{३} = २\frac{७}{१२}$।

(११) $\frac{१७}{८८} - \frac{५}{३३} = \frac{१}{२४}$।

(१२) $७\frac{५}{३६} - २\frac{४}{४५} = ५\frac{१}{२०}$।

(१३) $\frac{२}{३९} - \frac{१}{१०४} = \frac{१}{२४}$।

(१४) $१७\frac{१}{२६} - ५\frac{३७}{११७} = ११\frac{१३}{१८}$।

(१५) $२७\frac{१६१}{१९५} - ११\frac{५३}{६०} = १५\frac{४९}{५२}$।

(१६) $४\frac{२}{१५} - \left(३ - \frac{९}{२०}\right) = १\frac{७}{१२}$।

(१७) $\left(१४ - \frac{३७}{४२}\right) - ४\frac{२३}{३०} = ८\frac{३१}{३५}$।

(१८) $८\frac{१३}{६६} - ३१$ के $\frac{७}{३०} = \frac{५३}{५५}$।

(१९) $१७\frac{३}{४} - \left(\frac{६}{७} + \frac{३}{४}\text{ख}\right) = १६\frac{१}{४}$।

(२०) $\left(१\frac{५०}{८१} + \frac{२}{७}\text{ख}\right) - \left(२\frac{२५}{२७} - \frac{५}{८}\text{ख}\right) = \frac{५५}{५६}$।

(२१) $\dfrac{\frac{७}{८}}{४\frac{१}{२}} - \dfrac{\frac{५}{६}}{५\frac{१}{४}} = \frac{१}{२८}$।

(२२) $\frac{६}{९१} - \frac{१}{१५६} + \frac{११}{१६८} = \frac{१}{८}$ ।

(२३) $\frac{१}{५५} - \frac{१}{६०} + \frac{७९}{१३२} = \frac{३}{५}$ ।

(२४) $\frac{१}{६०} - \frac{१}{१२०} + \frac{१}{३६०} = \frac{१}{९०}$ ।

(२५) $\frac{१}{१८९} + \frac{१}{२१६} - \frac{१}{७२८} = \frac{१}{११७}$ ।

(२६) $\frac{१}{६६} - \frac{३}{७७} + \frac{१९}{७८} - \frac{६}{९१} = \frac{२}{१३}$ ।

(२७) किसी संख्या में उस का $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{८}$ घटा देओ तो उस का कौन अंश शेष रहेगा ?

उत्तर, $\frac{१}{८}$ ।

(२८) $\frac{१}{३}$ और $\frac{१}{४}$ इन का योग $\frac{१}{२}$ से कितना अधिक है ?

उत्तर, $\frac{१}{१२}$ अधिक है ।

(२९) $\frac{२५}{२९}$ और $\frac{३१}{३६}$ इन के योग से इन का अन्तर कितना छोटा है ?

उत्तर, $१\frac{१३}{१८}$ ।

(३०) $\dfrac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३}\text{स्व} + \frac{१}{५}\text{स्व}}{\frac{२}{३} + \frac{३}{५}\text{स्व} + \frac{५}{६}\text{स्व}}$ और $\dfrac{\frac{३}{४} - \frac{१}{५}\text{स्व} + \frac{३}{७}\text{स्व}}{\frac{५}{६} - \frac{३}{७}\text{स्व} + \frac{२}{५}\text{स्व}}$ इन का अन्तर क्या है ?

उत्तर, $\frac{१३५}{१५४}$ ।

५ भिन्न संख्याओं का गुणन ।

१४२ । रीति । गुण्यगुणकरूप दो वा बहुत संख्याओं के अंशों का गुणनफल करो सो अभीष्ट गुणनफल का अंश है और छेदों का गुणनफल करो सो अभीष्ट गुणनफल का छेद है ।

उदा० (१) $\frac{९}{१०}$ इस को $\frac{५}{६}$ से गुण के गुणनफल कहो ।

यहां $\frac{९}{१०} \times \frac{५}{६} = \frac{९ \times ५}{१० \times ६} = \frac{४५}{६०}$ इस के अंश और छेद को १५ का अपवर्तन करने से, $= \frac{३}{४}$ यह गुणनफल है ।

अथवा यहां अनेक अंश और छेदों में जो कोइ अंश और छेद इन दोनों में किसी एक हि संख्या का अपवर्तन लगता हो तो पहिले उन को अपवर्तित कर के फिर उन अपवर्तितों का गुणन करो। जैसा प्रभागजाति के सवर्णन में किया है। प्र· (१३२)

$\therefore \frac{९}{१०} \times \frac{५}{६} = \frac{९ \times ५}{१० \times ६} = \frac{३' \times १'}{२' \times २'} = \frac{३}{४}$ ।

इस रीति की उपपत्ति ।

$\frac{९}{१०} \times \frac{५}{६}$ इस गुणनफल से $\frac{९}{१०} \times ५$ यह फल अवश्य छ गुना होगा क्यों कि $\frac{५}{६}$ से ५ छ गुने हैं।

परंतु $\frac{९}{१०} \times ५ = \frac{९ \times ५}{१०}$ प्र· (१२८) इस लिये इस का ६ वां भाग अर्थात् $\frac{९ \times ५}{१०} \div ६ = \frac{९ \times ५}{१० \times ६}$ प्र· (१२७) यह अभीष्ट गुणनफल है।

$\therefore \frac{९}{१०} \times \frac{५}{६} = \frac{९ \times ५}{१० \times ६}$ यह उपपन्न हुआ।

यों गुण्यगुणकरूप संख्या दो से अधिक हों तो भी इसी प्रकार से उपपन्न होगा।

उदा० (२) $\frac{२}{३}, \frac{३}{४}$ और $\frac{५}{६}$ इन का गुणनफल कहो।

यहां $\frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{५}{६} = \frac{२ \times ३ \times ५}{३ \times ४ \times ६} = \frac{१' \times १' \times ५}{१' \times २' \times ६} = \frac{५}{१२}$ यह गुणनफल है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{१}{३} \times \frac{१}{४} = \frac{१}{१२}$ ।

(२) $\frac{३}{८} \times \frac{१}{७} = \frac{३}{५६}$ ।

(३) $\frac{११}{१२} \times \frac{७}{९} = \frac{७७}{१०८}$ ।

(४) $\frac{३}{४} \times \frac{५}{६} = \frac{५}{८}$ ।

(५) $\frac{५}{८} \times \frac{२}{५} = \frac{१}{४}$ ।

(६) $\frac{१५}{२२} \times \frac{११}{१२} = \frac{५}{८}$ ।

(७) $१\frac{७}{८} \times \frac{४}{५} = १\frac{१}{२}$ ।

(८) $१\frac{११}{१६} \times \frac{४}{९} = \frac{३}{४}$ ।

(९) $३\frac{१}{५} \times २\frac{१}{२} = ८$ ।

(१०) $\frac{८}{९} \times ४\frac{१}{८} = ३\frac{२}{३}$ ।

(११) $\left(४ - \frac{५}{८}\right) \times \frac{४}{१५} = \frac{९}{१०}$ ।

(१२) $\left(\frac{७}{९} \text{ के } \frac{३}{५}\right) \times \frac{२०}{२१} = \frac{४}{९}$ ।

(१३) $\left(\frac{३}{७} + \frac{५}{९} \text{ स्व}\right) \times \frac{१५}{१६} = \frac{५}{८}$ ।

(१४) $\left(\frac{८}{९} - \frac{५}{१४} \text{ स्व}\right) \times \frac{७}{१२} = \frac{१}{३}$ ।

(१५) $१४\frac{२}{३} \times \left(२ - \frac{४}{११}\right) = २४$ । (१६) $१३\frac{३}{४} \times \left(\frac{७}{१५} \text{ के } \frac{८}{३३}\right) = १\frac{५}{९}$ ।

(१७) $१७\frac{५}{६} \times \left(९ + \frac{३}{८} \text{स्व} - \frac{३}{११} \text{स्व}\right) = १६०\frac{१}{२}$ ।

(१८) $\left(८ - \frac{१}{५}\right) \times \left(७ - \frac{६}{१३}\right) = ५१$ ।

(१९) $\left(३ - \frac{१}{७}\right) \times \left(\frac{७}{१५} \text{ के } \frac{५}{८}\right) = \frac{५}{६}$ ।

(२०) $\left(७ - \frac{५}{९}\right) \times \left(\frac{७}{८} + \frac{१०}{२९} \text{स्व} - \frac{५}{९३} \text{स्व}\right) = ४\frac{२}{३}$ ।

(२१) $\left(\frac{७}{१०} \text{ के } \frac{५}{७}\right) \times \left(\frac{३}{४} \text{ के } \frac{४}{९} \text{ के } \frac{३}{८}\right) = \frac{१}{१६}$ ।

(२२) $\left(२\frac{१}{३} \text{ के } \frac{५}{८} \text{ के } \frac{३}{१०}\right) \times \left(\frac{१}{२} + \frac{१}{७} \text{स्व} - \frac{१}{४} \text{स्व}\right) = \frac{३}{१६}$ ।

(२३) $\left(\frac{१}{४} + \frac{१}{७} \text{स्व} + \frac{१}{९} \text{स्व}\right) \times \left(\frac{३}{५} - \frac{२}{९} \text{स्व} + \frac{१}{८} \text{स्व}\right) = \frac{१५}{९८}$ ।

(२४) $\frac{१}{२} \times \frac{३}{४} \times \frac{५}{६} = \frac{५}{१६}$ । (२५) $\frac{३}{५} \times \frac{७}{९} \times \frac{११}{१३} = \frac{७७}{१९५}$ ।

(२६) $३\frac{१}{२} \times ४\frac{१}{३} \times ५\frac{१}{४} = ७९\frac{५}{८}$ । (२७) $८\frac{१}{८} \times ५\frac{१}{१३} \times १\frac{१}{११} = ४५$ ।

(२८) $\frac{१०}{३३} \times \frac{२१}{२६} \times \frac{६५}{७७} = \frac{२५}{१२१}$ । (२९) $३\frac{३१}{५२} \times १\frac{४०}{५१} \times \frac{१२}{७७} = १$ ।

(३०) $\frac{३५}{७२} \times \frac{१३६}{१९५} \times \frac{१४३}{३२३} \times \frac{१७१}{३०८} = \frac{१}{१२}$ ।

(३१) यह नीचे गुणनचक्र लिखा है इस में हर एक खड़ी, बेंडी वा कर्णाकार पंक्ति की भिन्न संख्याओं का गुणनफल $\frac{१२५}{२१६}$ यहीं होता है। इस प्रकार से इस में गुणन के आठ उदाहरण हैं।

$\frac{१२५}{१९२}$	$\frac{५१०३}{५०००}$	$\frac{१२५०}{१७०१}$
$\frac{५०}{६३}$	$\frac{५}{६}$	$\frac{७}{८}$
$\frac{१८९}{२००}$	$\frac{३१२५०}{४५९२७}$	$\frac{९}{१०}$

६ भिन्न संख्याओं का भागहार ।

१४३ । रीति । भाजक के अंश और छेद को उलट देओ । फिर भाज्य और वह उलटा किया हुआ भाजक इन का गुणन करो । जो फल आवेगा वही लब्धि होगी ।

उदा० । $\frac{३}{८}$ इस में $\frac{२}{५}$ का भाग देओ ।

यहां $\frac{२}{५}$ इस भाजक के अंश और छेद को उलट देने से $\frac{५}{२}$ होता है । इसलिये $\frac{३}{८} \div \frac{२}{५} = \frac{३}{८} \times \frac{५}{२} = \frac{३ \times ५}{८ \times २} = \frac{१५}{१६}$ यह लब्धि है ।

इस रीति की उपपत्ति ।

जब कि $\frac{३}{८} \div \frac{२}{५}$ इस लब्धि का $\frac{३}{८} \div २$ यह लब्धि पञ्चमांश होगा । क्यों कि $\frac{२}{५}$ इस से २ पञ्चगुण है । और $\frac{३}{८} \div २ = \frac{३}{८ \times २}$ प्र॰(१२७)

इसलिये $\frac{३}{८ \times २}$ इस को ५ से गुण देओ तो अभीष्ट लब्धि होगी ।

परंतु $\frac{३}{८ \times २} \times ५ = \frac{३ \times ५}{८ \times २}$ प्र॰(१२८)

$\therefore$ अभीष्ट लब्धि $= \frac{३ \times ५}{८ \times २}$ यों उपपन्न हुआ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{१}{२} \div \frac{१}{३} = १\frac{१}{२}$ ।

(२) $\frac{५}{६} \div \frac{३}{४} = १\frac{१}{९}$ ।

(३) $\frac{८}{१५} \div \frac{२}{३} = \frac{४}{५}$ ।

(४) $\frac{४}{९} \div \frac{८}{१५} = \frac{५}{६}$ ।

(५) $\frac{२}{१५} \div \frac{२२}{३५} = \frac{७}{३३}$ ।

(६) $\frac{३}{१०} \div \frac{२१}{२२} = \frac{११}{३५}$ ।

(७) $८ \div \frac{६}{७} = ९\frac{१}{३}$ ।

(८) $१३\frac{१}{३} \div \frac{५}{९} = २४$ ।

(९) $५०\frac{१}{२} \div ७\frac{३}{४} = ६\frac{१६}{३१}$ ।

(१०) $१७\frac{३}{५} \div \left(५ - \frac{२}{७}\right) = ३\frac{११}{१५}$ ।

(११) $\frac{८}{९} \div \left(\frac{३}{४} \text{ के } \frac{५}{६}\right) = १\frac{१९}{४५}$ ।

(१२) $२३\frac{७}{१२} \div \left(\frac{३}{५} \text{ के } \frac{५}{७} \text{ के } \frac{७}{९}\right) = ७०\frac{३}{४}$ ।

(१३) $३२\frac{८}{९} \div \left(८ + \frac{२}{७}\text{ स्व}\right) = ३\frac{१६}{८१}$ ।

(१४) $१७\frac{५}{८} \div \left(\frac{३}{५} + \frac{१}{४}\text{ स्व} - \frac{१}{९}\text{ स्व}\right) = २६\frac{७}{१६}$ ।

(१५) $\left(१७ - \frac{४}{५}\right) \div \left(८ - \frac{२}{७}\right) = २\frac{१}{१०}$ ।

(१६) $\left(२६ - \frac{२}{३}\right) \div \left(५ - \frac{१}{४}\right) = ५\frac{१}{३}$ ।

(१७) $\left(१ - \frac{७}{१२}\right) \div \left(\frac{१५}{१६} \text{ के } \frac{८}{९}\right) = \frac{१}{२}$ ।

(१८) $\left(४ - \frac{२}{५}\right) \div \left(३\frac{१}{२} \div \frac{१}{७} \text{स्व}\right) = \frac{९}{१०}$ ।

(१९) $\left(३०२ - \frac{८}{१५}\right) \div \left(७\frac{३}{४} - \frac{३}{८} \text{स्व} - \frac{७}{१५} \text{स्व}\right) = ११६\frac{१०८}{१५५}$ ।

(२०) $\left(\frac{३}{७} \text{ के } \frac{५}{९}\right) \div \left(\frac{१}{२} \text{ के } \frac{३}{४} \text{ के } \frac{५}{६}\right) = \frac{१६}{२१}$ ।

(२१) $\left(\frac{१५}{२८} \text{ के } \frac{४}{५}\right) \div \left(\frac{२}{५} + \frac{१}{४} \text{स्व} - \frac{१}{७} \text{स्व}\right) = १$ ।

(२२) $\left(\frac{५}{७} - \frac{२}{५} \text{स्व} - \frac{१}{३} \text{स्व}\right) \div \left(\frac{८}{९} + \frac{३}{४} \text{स्व} + \frac{२}{७} \text{स्व}\right) = \frac{१}{६}$ ।

(२३) $\left(\frac{३}{४} + \frac{४}{५}\right) \div \left(\frac{२}{३} + \frac{५}{६}\right) = १\frac{१}{३०}$ ।

(२४) वह संख्या क्या है कि जिस को $३\frac{७}{१९}$ से गुणा देओ तो गुणनफल $१३\frac{५}{७}$ हो?

उत्तर, $४\frac{१}{१४}$ ।

(२५) $\frac{१५}{१६}$ को $\frac{१४}{१५}$ से गुणा देओ और $\frac{१५}{१६}$ में $\frac{१४}{१५}$ का भाग देओ। तब जो गुणनफल और लब्धि होगी उन का अन्तर कहो।

उत्तर, $\frac{२९}{२२४}$ ।

७ भिन्न संख्याओं की घातक्रिया।

१४४। रीति। जिस भिन्न संख्या का जो घात करना हो उस के अंश का वह घात करो सो अभीष्टघात का अंश होगा और छेद का भी वही घात करो सो अभीष्टघात का छेद होगा।

उदा०। $\frac{२}{३}$ इस का वर्ग और घन करो।

यहां $\frac{२}{३}$ का वर्ग $= \frac{२^२}{३^२} = \frac{२ \times २}{३ \times ३} = \frac{४}{९}$ ।

इसी भांति $\frac{२}{३}$ का घन $= \frac{२^३}{३^३} = \frac{२ \times २ \times २}{३ \times ३ \times ३} = \frac{८}{२७}$ ।

इस की उपपत्ति ।

जब कि $\frac{२}{३}$ का वर्ग $= \frac{२}{३} \times \frac{२}{३}$ । प्र॰(८८) सि॰(१)

$\therefore \quad \left(\frac{२}{३}\right)^२ = \frac{२ \times २}{३ \times ३}$ प्र॰(१४२)

$= \frac{२^२}{३^२}$ प्र॰(८८) सि॰(१)

इसी भांति । $\frac{२}{३}$ का घन $= \frac{२}{३} \times \frac{२}{३} \times \frac{२}{३}$ प्र॰(८८) सि॰(१)

$= \frac{२ \times २ \times २}{३ \times ३ \times ३}$ प्र॰(१४२)

$= \frac{२^३}{३^३}$ प्र॰(८८) सि॰(१)

इस से घातक्रिया की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{१}{३}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{५}{७}$ और $\frac{७}{९}$ इन के वर्ग और घन कहो ।

उत्तर, $\frac{१}{९}$, $\frac{९}{२५}$, $\frac{२५}{४९}$ और $\frac{४९}{८१}$ ये क्रम से वर्ग हैं

और $\frac{१}{२७}$, $\frac{२७}{१२५}$, $\frac{१२५}{३४३}$ और $\frac{३४३}{७२९}$ ये क्रम से घन हैं ।

(२) $३\frac{१}{४}$, $७\frac{१}{२}$, $१३\frac{३}{५}$ और $१७\frac{१}{३}$ इन के क्रम से वर्ग और घन कहो ।

उत्तर, $१०\frac{९}{१६}$, $५६\frac{१}{४}$, $१८४\frac{२४}{२५}$ और $३००\frac{४}{९}$ ये वर्ग हैं

और $३४\frac{२१}{६४}$, $४२१\frac{७}{८}$, $२५१५\frac{४५६}{१२५}$ और $५२०७\frac{१९}{२७}$ ये घन हैं ।

(३) $१\frac{५}{१२}$, $३\frac{१३}{२८}$, $३\frac{१८१}{३६०}$ और $७\frac{२९}{६०}$ इन के वर्ग क्या हैं?

उत्तर, $२\frac{१}{१४४}$, $१२\frac{१}{७८४}$, $१२\frac{१}{१५२१००}$ और $५६\frac{१}{३६००}$ ।

(४) $१९ - \frac{२}{५}$, $\frac{३}{४}$ के $\frac{८}{९}$ के $\frac{६}{७}$, $\frac{५}{८} + \frac{१}{७}$ स्व, और $४\frac{१}{२} - \frac{२}{९}$ स्व, इन के वर्ग कहो ।

उत्तर $३४५\frac{२४}{२५}$, $\frac{१६}{४९}$, $\frac{२५}{४९}$ और $१२\frac{१}{४}$ ।

(५) $४\frac{१}{८}+\frac{२}{१७}$, $७\frac{१}{१२}-\frac{३४}{३७}$, $६\frac{५}{६}-\frac{१}{१४}+\frac{३}{३२}$ और $८\frac{११}{३६}+\frac{३३}{४१}$ इन के क्रम से वर्ग कहो ।

उत्तर । $१८\frac{१}{१८४९६}$, $३८\frac{१}{१९७१३६}$, $४७\frac{१}{४५१५८४}$ और $८५\frac{१}{२१७८५७६}$

(६) $३\frac{३९२७}{६४८५}$ इस भिन्न संख्या का वर्ग और १३ इन दोनों में क्या अन्तर है ?

उत्तर । $\frac{१}{४२०५५२२५}$ ।

१४५ । सिद्धान्त । किसी भिन्न संख्या का वर्ग, घन इत्यादि घात भी भिन्न संख्या हि होती है ।

क्यों कि जब कि भिन्न संख्या के लघुतम रूप के अंश और छेद परस्पर दृढ़ होते हैं तब उन के वर्गादि घात जो क्रम से उस भिन्न संख्या के वर्गादि घात के अंश और छेद हैं प्र॰ (१४४) वे भी अवश्य परस्पर दृढ़ होंगे यह (१०९) प्रक्रम के अनुमान से सिद्ध है । इस लिये उस वर्गादि घात का अंश उस के छेद से निःशेष न होगा अर्थात् वह वर्गादि घात कोइ अभिन्न संख्या नहीं हो सकती किन्तु भिन्न हि होती है । यह उपपन्न हुआ ।

८ भिन्न संख्याओं की मूलक्रिया ।

१४६ । रीति । जिस भिन्न संख्या का जो घातमूल जानना हो उस के अंश और छेद के वे घातमूल क्रम से अभीष्ट घातमूल के अंश और छेद होंगे ।

उदा॰ । $\frac{६४}{१६९}$ इस का वर्गमूल क्या है ?

यहां $\sqrt{६४}=८$ और $\sqrt{१६९}=१३$

$$\therefore \sqrt{\frac{६४}{१६९}}=\frac{\sqrt{६४}}{\sqrt{१६९}}=\frac{८}{१३}$$ यह अभीष्ट वर्गमूल है ।

इस की उपपत्ति घातक्रिया की उलटी रीति से स्पष्ट है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{९}{१६}$, $\frac{२५}{३६}$, $\frac{४९}{६४}$, और $\frac{१२१}{१४४}$ इन के वर्गमूल क्या हैं ?

उत्तर । $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{८}$ और $\frac{११}{१२}$ ।

(२) $२\frac{१}{४}$, $५\frac{४}{९}$, $१०\frac{९}{१६}$ और $५४\frac{२१}{६४}$ इन के वर्गमूल क्या हैं?

उत्तर। $१\frac{१}{२}$, $२\frac{१}{३}$, $३\frac{१}{४}$ और $७\frac{३}{८}$।

(३) $२५२\frac{१}{६४}$, $५४०६\frac{१६६}{२८९}$, $१०७५७\frac{५२४}{६२५}$ और $२८३५६३\frac{२९०२}{५३२९}$। इन के वर्गमूल क्या हैं?

उत्तर। $१५\frac{७}{८}$, $७३\frac{९}{१७}$, $१०३\frac{१८}{२५}$ और $५३२\frac{३७}{७३}$।

१४७। सिद्धान्त। जो संख्या अवर्ग है अर्थात् जिस का वर्गमूल लेने से कुछ शेष रहता है उस संख्या का वास्तव ठीक वर्गमूल नहीं हो सकता अर्थात् उस का वर्गमूल न कोई अभिन्नसंख्या है न कोई भिन्न संख्या भी है।

जैसा। ७ इस संख्या का वर्गमूल अभिन्न वा भिन्न कोई संख्या नहीं है।

क्यों कि जब कि ४ का वर्गमूल २ और ९ का ३ है तब स्पष्ट है कि ४ और ९ के बीच में जो ७ एक संख्या है इस का वर्गमूल २ से बड़ा और ३ से छोटा होगा। अब २ और ३ के बीच में कोई अभिन्न संख्या नहीं है इस से अनुमान होता है कि ७ का वर्गमूल कोई भिन्न संख्या होगी परंतु ७ का वर्गमूल कोई भिन्न संख्या भी नहीं हो सकती क्यों कि भिन्न संख्या का वर्ग भिन्न हि होता है प्र० (१४५) और ७ अभिन्न संख्या है। इस लिये ७ का वर्गमूल कोई अभिन्न संख्या भी नहीं है भिन्न संख्या भी नहीं है। इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि अवर्ग संख्या का कोई वास्तव ठीक वर्गमूल नहीं हो सकता है। यह सिद्ध हुआ।

यद्यपि अवर्ग संख्या का कोई वास्तव वर्गमूल नहीं है तो भी जिस भिन्न संख्या का वर्ग उस अवर्ग संख्या के अतिशय पास होगा उसी को उस अवर्ग संख्या के वर्गमूल स्थान में लेते हैं और इस को उस अवर्ग संख्या का आसन्नवर्गमूल वा आसन्नमूल कहते हैं।

१४८। इस प्रक्रम में किसी भिन्न वा अभिन्न अवर्ग संख्या का आसन्न मूल लेने का भास्कराचार्य का प्रकार लिखते हैं।

वर्गेण महतेष्टेन हताच्छेदांशयोर्वधात्।
पदं गुणपदक्षुण्णच्छिद्भक्तं निकटं भवेत्॥

इस का अर्थ। जिस अवर्ग संख्या का आसन्नमूल लेना हो उस के अंश और छेद के गुणनफल को किसी बड़ी वर्गसंख्या से गुण के फल का

(निरग्र) वर्गमूल लेओ। और उस में उस बड़ी वर्गसंख्याका वर्गमूल और छेद इन के गुणनफल का भाग देओ। जो लब्धि होगी सो उस अवर्ग संख्या का आसन्नमूल होगा।

उदा० (१) $\frac{२}{३}$ इस का आसन्नमूल क्या है?

यहां अंश और छेद इन का गुणनफल = २ × ३ = ६ है।

और बड़ी वर्गसंख्या जो कल्पना करनी चाहिये सो लाघव के लिये १० के किसी घात का वर्ग कल्पना करते हैं। इस लिये बड़ी वर्गसंख्या = $(१०००)^२$ = १०००००० यह कल्पना किई है तब ६ × १०००००० = ६०००००० इस के निरग्रमूल के लिये न्यास।

```
         ६०००००० (२४४९
         ४
   ४४)  २००
         १७६
  ४८४)  २४००
         १९३६
 ४८८९)  ४६४००
         ४४००१
         २३९९  शेष
```

∴ २४४९ यह निरग्रमूल है। इस में १००० × ३ = ३००० इस का भाग देने से $\frac{२४४९}{३०००}$ यह लब्धि $\frac{२}{३}$ इस का आसन्नमूल है।

आसन्नमूल लेने की उपपत्ति।

$$\text{जब कि } \frac{२}{३} = \frac{२ \times ३}{३ \times ३} = \frac{२ \times ३ \times (१०००)^२}{३^२ \times (१०००)^२} = \frac{६००००००}{९००००००}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{२}{३}} = \sqrt{\frac{६००००००}{९००००००}} = \frac{\sqrt{६००००००}}{\sqrt{९००००००}} = \frac{२४४९}{३०००}।$$

इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

यहां $\frac{६००००००}{९००००००}$ इस के वर्गमूल के स्थान में इस के अतिशय पास जो $\frac{५९९७६०१}{९००००००}$ यह वर्ग संख्या है इस का वर्गमूल लिया है और जब कि $\frac{६००००००}{९००००००} - \frac{५९९७६०१}{९००००००} = \frac{२३९९}{९००००००}$ यह अन्तर बहुत स्वल्प है इस लिये $\frac{२४४९}{३०००}$ यह $\frac{२}{३}$ इस का आसन्नमूल है।

ऊपर की युक्ति से यह भी स्पष्ट प्रकाशित होता है कि बड़ी वर्ग संख्या ज्यों२ अधिक लिई जायगी त्यों२ आसन्नमूल अधिक सूक्ष्म आवेगा ।

उदा० (२) ७ का आसन्नमूल क्या है ?

यहां $७ = \frac{७}{१}$ इस लिये अंश और छेद का गुणनफल = ७ × १ = ७ और बड़ी वर्ग संख्या = $(१०००)^२$ = १०००००० इस लिये ७ × १०००००० = ७०००००० इस के वर्गमूल के लिये न्यास

```
        ७००००००  (२६४५
        ४
   ४६)  ३००
        २७६
  ५२४)  २४००
        २०९६
 ५२८५)  ३०४००
        २६४२५
         ३९७५ शेष
```

∴ २६४५ यह निरग्र मूल है । इस में १००० × १ = १००० इस का भाग देने से, $\frac{२६४५}{१०००} = \frac{५२९}{२००} = २\frac{१२९}{२००}$ यह आसन्न मूल है ।

अथवा यहां निरग्र मूल लेने में शेष बहुत छूटता है इस लिये जो २६४५ + १ = २६४६ इतना निरग्र मूल माना जावे तो $\frac{२६४६}{१०००} = \frac{१३२३}{५००} = २\frac{३२३}{५००}$ यह मान पहिले आसन्न मूल से कुछ सूक्ष्म है ।

क्यों कि पहिला आसन्न मूल $\frac{२६४५}{१०००}$ यह है । इस का वर्ग अर्थात् $\frac{(२६४५)^२}{(१०००)^२} = \frac{६९९६०२५}{१००००००}$ इस का और ७ का अन्तर $\frac{३९७५}{१००००००}$ यह है । और दूसरा आसन्न मूल $\frac{२६४६}{१०००}$ यह है । इस का वर्ग अर्थात् $\frac{(२६४६)^२}{(१०००)^२} = \frac{७००१३१६}{१००००००}$ इस का और ७ का अन्तर $\frac{१३१६}{१००००००}$ यह है । यहां पहिले अन्तर से दूसरा अन्तर और थोड़ा है । इस लिये दूसरा आसन्न मूल कुछ अधिक सूक्ष्म है ।

यों आसन्न मूल लेने में निरग्र मूल का शेष जो उस के भाजक के आधे से बड़ा हो तो वहां १ अधिक निरग्र मूल को निरग्र मूल मानो तो आसन्न मूल कुछ अधिक सूक्ष्म होगा ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{४}{७}$ और $\frac{१३}{१५}$ इन के आसन्न मूल क्या हैं? इस में १०० के वर्ग को बड़ी वर्ग संख्या मानो ।

उत्तर, $\frac{१४१}{२००}$, $\frac{३८७}{५००}$, $\frac{५२९}{७००}$ और $\frac{१३९६}{१५००}$ ।

(२) १३, १७, १८, ३५ और ७६ इन के आसन्न मूल क्या हैं? इस में १००० के वर्ग को बड़ी वर्ग संख्या मानो ।

उत्तर । ३ $\frac{३०३}{५००}$, ४ $\frac{१२३}{१०००}$, ४ $\frac{२४३}{१०००}$, ५ $\frac{२२९}{२५०}$ और ८ $\frac{३५९}{५००}$ ।

(३) ७३ $\frac{१}{२}$, १०५ $\frac{१}{७}$, २३७ $\frac{२}{९}$ और ८९४ $\frac{१३}{३५}$ इन के आसन्न मूल क्या हैं। यहां १०००० के वर्ग को बड़ी वर्ग संख्या मानो ।

उत्तर । ८ $\frac{१४३३}{२५००}$। १० $\frac{८८८७}{३५०००}$, १५ $\frac{१८०९१}{४५०००}$ और २९ $\frac{६३५२३}{७००००}$ ।

६ प्रकीर्णक ।

वितत भिन्नसंख्या ।

१४९ । जिस भागजाति संख्या को वितत करना अर्थात् फैलाना है वह जो सूक्ष्म भिन्न संख्या हो तो उस के अंश और छेद में अंश का भाग देओ । और जो वह भागजाति संख्या स्थूल हो तो पहिले उस को भागानुबन्ध का रूप देने से जो उस में भिन्न अवयव बनेगा उस के अंश और छेद में अंश का भाग देओ तो दोनों प्रकार की संख्या में अंश स्थान में १ होगा और छेद स्थान में भागानुबन्ध संख्या होगी । फिर ऐसी हि क्रिया बार २ तब तक करो जब तक छेद स्थान में भागानुबन्ध संख्या न आवे अर्थात् अभिन्न हि संख्या हो जावे । तब जो भिन्न संख्या का रूप बनेगा उस को वितत भिन्न संख्या कहते हैं ।

यहां भिन्न संख्या के वितत रूप में भागानुबन्ध के बीच में धन चिह्न लिखते हैं ।

उदा० (१) $\frac{६९}{१५१}$ इस को वितत भिन्न संख्या का रूप देओ ।

यहां $$\frac{६९}{१५१} = \frac{१}{\frac{१५१}{६९}} = \frac{१}{२ + \frac{१३}{६९}}$$

$$= \frac{१}{२ + \frac{१}{\frac{६९}{१३}}} = \frac{१}{२ + \frac{१}{५ + \frac{४}{१३}}}$$

$$= \frac{१}{२ + \frac{१}{५ + \frac{१}{\frac{१३}{४}}}} = \frac{१}{२ + \frac{१}{५ + \frac{१}{३ + \frac{१}{४}}}}$$

इस प्रकार से $\frac{६९}{१५१}$ इस का $$\frac{१}{२ + \frac{१}{५ + \frac{१}{३ + \frac{१}{४}}}}$$ यह वितत रूप है। इस को वितत भिन्न संख्या कहते हैं।

उदा० (२) $\frac{१३८}{१०७}$ इस को वितत भिन्न संख्या का रूप देओ ।

यहां $$\frac{१३८}{१०७} = १ + \frac{३१}{१०७}$$

$$= १ + \frac{१}{३ + \frac{१४}{३१}}$$

$$= १ + \frac{१}{३ + \frac{१}{२ + \frac{३}{१४}}}$$

$$= १ + \frac{१}{३ + \frac{१}{२ + \frac{१}{४ + \frac{२}{३}}}} = १ + \frac{१}{३ + \frac{१}{२ + \frac{१}{४ + \frac{१}{१ + \frac{१}{२}}}}}$$

$$\therefore \frac{१३८}{१०७} = १ + \frac{१}{३ +}\,\frac{१}{२ +}\,\frac{१}{४ +}\,\frac{१}{१ +}\,\frac{१}{२}$$ यह वितत रूप है।

१५०। ऊपर के दो उदाहरणों को देखने से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि उद्दिष्ट भागजाति के अंश और छेद का महत्तमापवर्तन की क्रिया के ऐसा परस्पर में भाग देने से जो लब्धि होगी वेही उस के वितत रूप में क्रम से भागानुबन्ध की अभिन्न संख्या होती हैं। जैसी पहिले उदाहरण में २, ५ इत्या० और दूसरे में १, ३, २ इत्या०। इस लिये जिस भिन्न संख्या को वितत रूप देना हो उस के अंश और छेद का परस्पर में भाग देने से जो लब्धि मिलेगी उन से उद्दिष्ट भिन्न संख्या का वितत रूप तुरंत बनेगा।

जैसा। ऊपर के उदाहरण में $\frac{१३८}{१०७}$ इस के अंश और छेद का परस्पर में भाग देने के लिये न्यास।

१०७) १३८ (१, ३, २, ४, १, २ ये परस्पर भजन में लब्धि आती हैं। और ये ही वितत रूप में क्रम से भागानुबन्ध की अभिन्न संख्या हैं।

१४	३१
२	३
०	१

$$\text{इस लिये } \frac{१३८}{१०७} = १ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{४ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२}}}}}$$

यह वितत रूप तुरंत बनता है।

इसी भांति पहिले उदाहरण में $\frac{६६}{१५१}$ इस के अंश और छेद का परस्पर में भाग देने के लिये न्यास

१५१) ६६ (०, २, ५, ३, ४ ये परस्पर भजन से लब्धि हैं।

१३	४
१	०

$$\therefore \frac{६६}{१५१} = 0 + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{५ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{४}}}} \quad \text{वा,} = \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{५ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{४}}}}$$

यह वितत रूप है। इस में जैसी पहिली लब्धि शून्य आई है उस को छोड के शेष रूप लिखा है ऐसी हि जहां पहिली लब्धि शून्य आवेगी वहां उस को छोड के वितत रूप लिखो।

यहां वितत भिन्न संख्या के $\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{५+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{४}}}}$

इस रूप को लाघव के लिये $\frac{१}{२+}\,\frac{१}{५+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{४}$ यों भी लिखते हैं।

ऐसा ही $\frac{१३८}{१०७} = १+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{४+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{५}}}}}$

इस वितत भिन्न संख्या को $१+\frac{१}{३+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{४+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{५}$ यों भी लिखते हैं।

१५१। यों ऊपर के प्रक्रम में भिन्न संख्या के अंश और छेद का परस्पर में भाग देने से जो लब्धि आती हैं उन से उस भिन्न संख्या का वितत रूप बनाने का प्रकार दिखलाया। उस में उन लब्धिओं में से क्रम से एक, दो, तीन आदि लब्धि लेके उन से जो अलग २ वितत भिन्न संख्या बनेंगी उन के मान उस भिन्नसंख्या के आसन्नमान कहाते हैं।

जैसा। $\frac{२५२८}{१०९५}$ इस भिन्न संख्या के लब्धिओं के लिये न्यास

१०९५) २५२८ (२, ३, ४, ५, १, ३, १, २ ये लब्धि हैं।

८१ ३३८

११ १४

२ ३

० १

$\therefore \frac{२५२८}{१०९५} = २+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{४+\cfrac{१}{५+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{२}}}}}}}$

यह वितत रूप है इस में २, ३, ४ आदि लब्धिओं में से एक, दो, तीन आदि लब्धि लेके उन से $२,\ २+\frac{१}{३},\ २+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{४}}$ इत्यादि वितत भिन्न संख्या बनती हैं इन के मान $\frac{२५२८}{१०९५}$ इस मुख्य भिन्न संख्या के आसन्न मान कहाते हैं।

१५२ । भिन्न संख्या के आसन्न मानों में हर एक मान अपने पूर्व मान की अपेक्षा से उस भिन्न संख्या के पास होता है । अर्थात् हर एक मान का और मुख्य भिन्न संख्या का अन्तर उस के पूर्व मान के और उस भिन्न संख्या के अन्तर से थोड़ा होता है ।

जैसा । $२, २ + \frac{१}{३}, २ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{४}}$ इत्यादि मानों में २ इस प्रथम मान से और मुख्य भिन्न संख्या के अन्तर से $२ + \frac{१}{३}$ इस दूसरे मान का और मुख्य भिन्न संख्या का अन्तर थोड़ा होता है और इस अन्तर से भी $२ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{४}}$ इस तीसरे मान का और मुख्य भिन्न संख्या का अन्तर थोड़ा होता है । ऐसा हि आगे भी जानो ।

इस का कारण अति स्पष्ट है । क्यों कि जिस आसन्न मान में भिन्न संख्या के वितत रूप का जितना अवयव अधिक लिया जायगा उतना हि वह मान भिन्न संख्या के पास होगा और जितना अवयव अधिक छोड़ दिया जायगा उतना हि वह मान दूर होगा । यह उदाहरण से और स्पष्ट कर के दिखलाते हैं ।

जब कि $\frac{२५२८}{१०९५} = २ + \frac{३३८}{१०९५}$

$$= २ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{८१}{३३८}}$$

$$= २ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{४ + \cfrac{१४}{८१}}}$$

इत्यादि

तब इस में स्पष्ट देख पड़ता है कि $२ + \frac{३३८}{१०९५}$ इस मुख्य संख्या के मान में से जो $\frac{३३८}{१०९५}$ इतना अवयव छोड़ दिया जायगा तो शेष २ यह पहिला आसन्न मान स्थूल होगा अर्थात् मुख्य भिन्न संख्या से दूर होगा ।

परंतु $\frac{३३८}{१०९५}$ वा $\cfrac{१}{३ + \cfrac{८१}{३३८}}$ इस समग्र शेष को छोड़ देने की अपेक्षा से जो उस के स्थान में $\frac{१}{३}$ लिया जावे और $\frac{८१}{३३८}$ इतना छोड़ दिया जावे तो $२ + \frac{१}{३}$ यह २ से सूक्ष्म होगा अर्थात् २ इस प्रथम मान की अपेक्षा से $२ + \frac{१}{३}$ यह दूसरा आसन्नमान

मुख्य भिन्न संख्या के पास होगा। इसी भांति $\frac{८१}{३३८}$ वा $\frac{१}{४+\frac{१४}{८१}}$ इस समय अवयव को छोड़ देने की अपेक्षा से जो $\frac{८१}{३३८}$ इस के स्थान में $\frac{१}{४}$ लिया जावे और $\frac{१४}{८१}$ इतना छोड़ दिया जावे तो $२+\frac{१}{३+\frac{१}{४}}$ यह $२+\frac{१}{३}$ से सूक्ष्म होगा अर्थात् $२+\frac{१}{३}$ इस दूसरे आसन्न मान की अपेक्षा से $२+\frac{१}{३+\frac{१}{४}}$ यह तीसरा आसन्न मान मुख्य संख्या के पास होगा। इसी भांति आगे भी जानो।

१५३। भिन्न संख्या के आसन्न मानों में जो विषम हैं अर्थात् पहिला, तीसरा, पांचवा इत्यादि ये प्रत्येक उस भिन्न संख्या से छोटे होते हैं। और जो सम हैं अर्थात् दूसरा, चौथा, छठवां इत्यादि ये प्रत्येक उस भिन्न संख्या से बड़े होते हैं।

इस की उपपत्ति।

$$\text{जब कि } \frac{२५२८}{१०९५}=२+\frac{३३८}{१०९५}$$
$$=२+\frac{१}{३+\frac{८१}{३३८}}$$
$$=२+\frac{१}{३+\frac{१}{४+\frac{१४}{८१}}}$$

इत्यादि

तब इस में यह स्पष्ट दिखाई देता है कि $२+\frac{३३८}{१०९५}$ इस में २ यह पहिला आसन्न मान मुख्य संख्या से छोटा है। क्यों कि इस में $\frac{३३८}{१०९५}$ इतना छोड़ दिया है। और जब $२+\frac{१}{३+\frac{८१}{३३८}}$ इस में $\frac{१}{३+\frac{८१}{३३८}}$ इस से $\frac{१}{३}$ यह बड़ा है क्यों कि जो भाजक छोटा हो तो लब्धि बढ़ जाती है इस लिये $२+\frac{१}{३}$ यह दूसरा आसन्न मान मुख्य संख्या से बड़ा होता है। इसी भांति जब $\frac{१}{४+\frac{१४}{८१}}$ इस से $\frac{१}{४}$ यह बड़ा है

तब $\frac{१}{३+\frac{१}{४+\frac{१४}{८१}}}$ इस से $\frac{१}{३+\frac{१}{४}}$ यह छोटा होगा। क्यों कि जो भाजक बड़ा हो तो लब्धि छोटी होती है। इसलिये $२+\frac{१}{३+\frac{१}{४}}$ यह तीसरा आसन्न मान मुख्य संख्या से छोटा है। इसी भांति आगे भी। इस से उक्त नियम की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

१५४। भिन्न संख्या के अंश और छेद का परस्पर में भाग देने से जो लब्धि आती हैं उन से उस संख्या के क्रम से आसन्न मानों के भागजाति रूप जानने का एक सुगम अनुगत प्रकार कहते हैं।

भिन्न संख्या की लब्धियों को एक पंक्ति में लिखो। तब पहिली लब्धि हि पहिला आसन्न मान होता है उस के नीचे १ छेद मान के उस को छेद समेत पहिली लब्धि के नीचे लिखो। फिर दूसरी लब्धि से पहिले आसन्न मान के अंश को गुण के फल में १ जोड़ देओ सो दूसरे आसन्न मान का अंश है और दूसरी लब्धि हि उस का छेद है। यों सिद्ध किये हुए दूसरे आसन्न मान को दूसरी लब्धि के नीचे लिखो। यों जब पहिला और दूसरा आसन्न मान सिद्ध होवे तब आगे हर एक लब्धि से उस के पूर्व आसन्न मान के अंश और छेद को गुण के गुणनफलों में क्रम से उस के पूर्व आसन्न मान के अंश और छेद को जोड देओ सो क्रम से उत्तर आसन्न मान के अंश और छेद होंगे। इस प्रकार से तीसरा, चौथा इत्यादि आसन्न मान क्रम से उत्पन्न कर के उन को उस२ लब्धि के नीचे लिखो। यों सब आसन्न मानों के भागजाति रूप तुरंत सिद्ध होते हैं। उन में अन्त का मान मुख्य संख्या के समान होता है। और इसी लिये किसी वितत भिन्न संख्या को उस के समान भागजाति का रूप जानने का भी यही सुगम उपाय है।

उदा०। $\frac{२५२८}{१०९५}$ इस भिन्न संख्या के आसन्न मान भागजाति रूप में कहो।

यहां अंश और छेद के परस्पर भजन से २, ३, ४, ५, १, ३, १ और २ ये लब्धि आती हैं। तब आसन्न मानों के लिये न्यास।

लब्धि।	२,	३,	४,	५,	१,	३,	१,	२ ।
आसन्न मान।	$\frac{२}{१}$,	$\frac{७}{३}$,	$\frac{३०}{१३}$,	$\frac{१५७}{६८}$,	$\frac{१८७}{८१}$,	$\frac{७१८}{३११}$,	$\frac{९०५}{३९२}$,	$\frac{२५२८}{१०९५}$ ।

ये सब $\frac{२५२८}{१०९५}$ इस संख्या के आसन्न मान हैं। इन में उत्तरोत्तर मुख्य संख्या के आसन्न हैं और इन में जो विषम हैं और अर्थात् $\frac{२}{१}$, $\frac{३०}{१३}$, $\frac{१८७}{८१}$ और $\frac{६०५}{३९२}$ ये मुख्य संख्या से छोटे हैं और जो सम हैं अर्थात् $\frac{७}{३}$, $\frac{१५७}{६८}$ और $\frac{७१८}{३११}$ ये मुख्य संख्या से बड़े हैं।

१५५। ऊपर के प्रक्रम में लिखे हुए प्रकार की उपपत्ति।

जब कि $\frac{२५२८}{१०९५}$ इस भिन्न संख्या के आसन्न मानों के वितत रूप क्रम से $\frac{२}{१}$, $२+\frac{१}{३}$, $२+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{४}}$, $२+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{४+\cfrac{१}{५}}}$ इत्यादि हैं। तब

(१) पहिला आसन्न मान $=\frac{२}{१}$ यह स्पष्ट हि है।

(२) दूसरा आसन्न मान $=२+\frac{१}{३}=\frac{२\times३+१}{३}=\frac{७}{३}$।

(३) अब $\frac{२\times३+१}{३}$ इस दूसरे आसन्न मान में जो ३ के स्थान में $३+\frac{१}{४}$ रक्खो तो स्पष्ट है कि वह तीसरा आसन्न मान होगा।

$$\therefore \text{ तीसरा आसन्न मान } = \frac{२\times\left(३+\frac{१}{४}\right)+१}{३+\frac{१}{४}} = \frac{२\times३+१+\frac{२}{४}}{३+\frac{१}{४}}$$

$=\dfrac{७+\frac{२}{४}}{३+\frac{१}{४}}$ इस के अंश और छेद को ४ से गुणा देने से $=\frac{७\times४+२}{३\times४+१}=\frac{३०}{१३}$।

(४) फिर $\frac{७\times४+२}{३\times४+१}$ इस तीसरे मान में भी जो ४ के स्थान में $४+\frac{१}{५}$ रक्खो तो वही चौथा आसन्न मान होगा।

$$\therefore \text{ चौथा आसन्न मान } = \frac{७\times\left(४+\frac{१}{५}\right)+२}{३\times\left(४+\frac{१}{५}\right)+१} = \frac{७\times४+२+\frac{७}{५}}{३\times४+१+\frac{३}{५}}$$

$$=\frac{३०+\frac{७}{५}}{१३+\frac{३}{५}}=\frac{३०\times५+७}{१३\times५+३}=\frac{१५७}{६८}$$

इसी प्रकार से आगे भी

यों $\frac{२५२८}{१०९५}$ इस भिन्न संख्या की पहिली, दूसरी इत्यादि क्रम से लब्धि और इन के नीचे क्रम से ऊपर सिद्ध किये हुए आसन्न मान ये हैं ।

लब्धि । २   ३   ४   ५   इत्या०

आसन्न मान । $\frac{२}{१}$, $\frac{२\times३+१}{३} = \frac{७}{३}$, $\frac{७\times४+२}{३\times४+१} = \frac{३०}{१३}$, $\frac{३०\times५+७}{१३\times५+३} = \frac{१५७}{६८}$ इत्या०

इस में उस २ लब्धि के नीचे दिखलाये हुए आसन्न मान को थोड़ा चित्त देके देखने से (१५४) वे प्रक्रम में कहे हुए प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

१५६ । जिस भिन्न संख्या के अंश और छेद की संख्या बड़ी है उस से योग, गुणन आदि गणित करने में अधिक क्लेश होता है । इस-लिये उस के स्थान में जो उस का कोई आसन्न मान लिया जावे तो उस के अंश और छेद की संख्या छोटी होती है । इस कारण से उस से गणित करने में लाघव होता है और फल भी वास्तव फल के आ-सन्न आता है । यही भिन्न संख्या के आसन्न मानों के जानने का मुख्य उपयोग है ।

इस लिये अब हम भिन्न संख्या के आसन्न मान निकालने के और वितत भिन्न संख्याओं के उन के समान भागजाति रूप जानने के कुछ उदाहरण लिखते हैं ।

उदा० (१) $\frac{३९२७}{१२५०}$ इस भिन्न संख्या का वितत रूप और आसन्न मान क्या हैं?

यहां लब्धिओं के लिये न्यास ।

१२५०) ३९२७ (३, ७, १६, ११ ये लब्धि हैं ।

११   १७७

०   १

$\therefore \frac{३९२७}{१२५०} = ३ + \frac{१}{७+}\,\frac{१}{१६+}\,\frac{१}{११}$ यह वितत रूप है ।

अब आसन्न मानों के लिये न्यास ।

लब्धि । ३,   ७,   १६,   ११ ।

आसन्न मान । $\frac{३}{१}$, $\frac{२२}{७}$, $\frac{३५५}{११३}$, $\frac{३९२७}{१२५०}$ ।

भास्कराचार्य ने लीलावती में लिखा है कि वृत्तक्षेत्र के व्यास को ३९२७ से गुण देओ और उस में १२५० का भाग देओ। अर्थात् व्यास को $\frac{३९२७}{१२५०}$ इस संख्या से गुण देओ सो परिधि होता है। अब $\frac{३९२७}{१२५०}$ इस संख्या के अंश और छेद बड़े हैं। इसलिये इस के स्थान में इस के आसन्न मान लिये जावें तो थोड़े अन्तर से परिधि का मान मिलेगा। उस में पहिला आसन्न मान ३ है। यह गुणक बहुत स्थूल है। परंतु दूसरा आसन्न मान जो $\frac{२२}{७}$ है यह गुणक पहिले से सूक्ष्म है। भास्कराचार्य ने लीलावती में यह भी गुणक लिखा है। और $\frac{३५५}{११३}$ यह तीसरा आसन्न मान उस से भी सूक्ष्म है। और वस्तुतः व्यास के $\frac{३९२७}{१२५०}$ इस गुणक से भी सूक्ष्म है और यह भास्कराचार्य ने नहीं लिखा है। और जब कि $\frac{३५५}{११३}$ इस गुणक के अंश और छेद की संख्या भी छोटी है और अधिक सूक्ष्म है इसलिये यह गुणक अवश्य स्मरण रखने के योग्य है। इस के स्मरण रखने की एक युक्ति यह है कि १, ३ और ५ इन प्रथम तीन विषम संख्याओं में हर एक को दो २ बार कर के एक पंक्ति में लिखो। जैसा ११३३५५ और इस के ठीक बीच में एक रेखा कर के इस के दो विभाग करो। जैसा ११३। ३५५। इस में पहिला विभाग उस गुणक का छेद है और दूसरा उस का अंश है। इस युक्ति से $\frac{३५५}{११३}$ इस गुणक का स्मरण सर्वदा रह सकता है।

उदा० (२) $\frac{३९२७}{५०००}$ इस भिन्न संख्या का वितत रूप और आसन्न मान क्या हैं?

यहां लब्धिओं के लिये न्यास।

५०००) ३९२७ (०, १, ३, १, १, १, १५, १, १, २, ४ ये लब्धि हैं।

१०७३	७०८
३६५	३४३
२२	१३
९	४
१	०

$$\therefore \frac{३९२७}{५०००} = \frac{१}{१+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१५+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{४}$$ यह वितत रूप है

और लब्धि । ०, १, ३, १, १, १, १५, १, १, २, ४ ।

आसन्न मान । $\frac{०}{१}, \frac{१}{१}, \frac{३}{४}, \frac{४}{५}, \frac{७}{९}, \frac{११}{१४}, \frac{१७२}{२१९}, \frac{१८३}{२३३}, \frac{३५५}{४५२}, \frac{८९३}{११३७}, \frac{३९२७}{५०००}$ ।

भास्कराचार्य ने लिखा है कि व्यास के वर्ग को $\frac{\text{३९२७}}{\text{५०००}}$ इस से गुण देओ। गुणनफल वृत्त का क्षेत्रफल होगा। और $\frac{\text{३९२७}}{\text{५०००}}$ इस गुणक के आसन्न मानों में $\frac{\text{११}}{\text{१४}}$ यह एक गुणक भास्कराचार्य ने लिखा है। परंतु इस वितत भिन्न संख्या की रीति से इस के और भी अनेक गुणक प्रकट होते हैं। और इन सब आसन्न मानों में वस्तुतः $\frac{\text{३५५}}{\text{४५२}}$ (अर्थात् $\frac{\text{७१०}}{\text{९०४}}$) यही गुणक सब से सूक्ष्म है।

उदा० (३) $\text{३} + \frac{\text{१}}{\text{२}+}\,\frac{\text{१}}{\text{४}+}\,\frac{\text{१}}{\text{१}+}\,\frac{\text{१}}{\text{७}+}\,\frac{\text{१}}{\text{५}}$ इस वितत भिन्न संख्या के आसन्न मान और उन के समान भागजाति क्या हैं?

यहां स्पष्ट है कि ३, २, ४, १, ७ और ५ ये क्रम से लब्धि हैं।

इस लिये ३, २, ४, १, ७, ५ ।

$\frac{\text{३}}{\text{१}}, \frac{\text{७}}{\text{२}}, \frac{\text{३१}}{\text{९}}, \frac{\text{३८}}{\text{११}}, \frac{\text{२९७}}{\text{८६}}, \frac{\text{१५२३}}{\text{४४१}}$ ।

ये आसन्न मान हैं और $\frac{\text{१५२३}}{\text{४४१}}$ यही मुख्य भागजाति संख्या है। जिस का वितत रूप उदाहरण में दिया है।

उदा० (४) $\text{५} + \frac{\text{१}}{\text{३}+}\,\frac{\text{१}}{\text{२}+}\,\frac{\text{१}}{\text{१}+}\,\frac{\text{१}}{\text{२}+}\,\frac{\text{१}}{\text{१}+}\,\frac{\text{१}}{\text{४}+}\,\frac{\text{१}}{\text{७}}$ इस वितत भिन्न संख्या के आसन्न मान और उस के समान भागजाति क्या है। और पास २ के दो आसन्न मानों के अन्तर क्या हैं?

यहां लब्धि । ५, ३, २, १, २, १, ४, ७, ।

और आसन्न मान । $\frac{\text{५}}{\text{१}}, \frac{\text{१६}}{\text{३}}, \frac{\text{३७}}{\text{७}}, \frac{\text{५३}}{\text{१०}}, \frac{\text{१४३}}{\text{२७}}, \frac{\text{१९६}}{\text{३७}}, \frac{\text{९२७}}{\text{१७५}}, \frac{\text{६६८५}}{\text{१२६२}}$ ।

इस लिये उद्दिष्ट वितत भिन्न संख्या का भागजाति रूप $\frac{\text{६६८५}}{\text{१२६२}}$ यह है। और इस के आसन्न मानों में $\frac{\text{५}}{\text{१}}, \frac{\text{३७}}{\text{२७}}, \frac{\text{१४३}}{\text{२७}}$ और $\frac{\text{९२७}}{\text{१७५}}$ ये उस से छोटे हैं और $\frac{\text{१६}}{\text{३}}, \frac{\text{५३}}{\text{१०}}$ और $\frac{\text{१९६}}{\text{३७}}$ ये बड़े हैं। प्र०(१५३)

$$\therefore \frac{\text{१६}}{\text{३}} - \frac{\text{५}}{\text{१}} = \frac{\text{१६}-\text{१५}}{\text{३}\times\text{१}} = \frac{\text{१}}{\text{३}}$$

$$\frac{\text{१६}}{\text{३}} - \frac{\text{३७}}{\text{७}} = \frac{\text{११२}-\text{१११}}{\text{३}\times\text{७}} = \frac{\text{१}}{\text{२१}}$$

$$\frac{\text{५३}}{\text{१०}} - \frac{\text{३७}}{\text{७}} = \frac{\text{३७१}-\text{३७०}}{\text{१०}\times\text{७}} = \frac{\text{१}}{\text{७०}}$$

$$\frac{५३}{१०} - \frac{१४३}{२७} = \frac{१४३१-१४३०}{२७०} = \frac{१}{२७०}$$

$$\frac{१९६}{३७} - \frac{१४३}{२७} = \frac{५२९२-५२९१}{२७\times३७} = \frac{१}{९९९}$$

$$\frac{१९६}{३७} - \frac{९२७}{१७५} = \frac{३४३००-३४२९९}{३७\times१७५} = \frac{१}{६४७५}$$

$$\frac{६६८५}{१२६२} - \frac{९२७}{१७५} = \frac{११६९८७५-११६९८७४}{१७५\times१२६२} = \frac{१}{२२०८५०} ।$$

ये पास २ के दो २ मानों के अन्तर हैं। और इस उदाहरण में यह स्पष्ट देख पडता है कि हर एक पास २ के दो आसन्न मानों के अन्तर का अंश १ है और उन आसन्न मानों के छेदों का गुणनफल उस अन्तर का छेद है।

उदा० (५) $\frac{२९८}{१०९}$ इस संख्या का वितत रूप, आसन्न मान और हर एक आसन्न मान का और मुख्य संख्या का अन्तर दिखलाओ।

यहां लब्धि । २ १ २ १ ३ ७ ।

$\therefore$ आसन्न मान । $\frac{२}{१}, \frac{३}{१}, \frac{८}{३}, \frac{११}{४}, \frac{४१}{१५}, \frac{२९८}{१०९}$ ।

और $$\frac{२९८}{१०९} - २ = \frac{२९८-२१८}{१०९} = \frac{८०}{१०९} = \frac{१}{१\frac{२९}{८०}} ।$$

$$३ - \frac{२९८}{१०९} = \frac{३२७-२९८}{१०९} = \frac{२९}{१०९} = \frac{१}{३\frac{२२}{२९}} ।$$

$$\frac{२९८}{१०९} - \frac{८}{३} = \frac{८९४-८७२}{१०९\times३} = \frac{२२}{३२७} = \frac{१}{१४\frac{१९}{२२}}$$

$$\frac{११}{४} - \frac{२९८}{१०९} = \frac{११९९-११९२}{१०९\times४} = \frac{७}{४३६} = \frac{१}{६२\frac{२}{७}} ।$$

$$\frac{२९८}{१०९} - \frac{४१}{१५} = \frac{४४७०-४४६९}{१०९\times१५} = \frac{१}{१६३५} ।$$

ये अन्तर उत्तरोत्तर छोटे हैं।

१५७। जैसा किसी भिन्न संख्या को वितत रूप देने का प्रकार दिखलाया वैसा हर एक अवर्ग संख्या का वर्गमूल भी वितत भिन्न संख्या के रूप का हो सकता है।

जैसा। २८ एक अवर्ग संख्या है। उस के वर्गमूल का वितत रूप इस प्रकार से बनता है।

जब कि २८ का वर्गमूल ५ है तब स्पष्ट है कि ५ को जो उस वर्गमूल में घटा देओ तो शेष $\sqrt{२८} - ५$ यह अवश्य १ से न्यून होगा ।

अब, $\sqrt{२८} - ५$, वा, $\frac{\sqrt{२८} - ५}{१}$ इस शेष के अंश और छेद को $\sqrt{२८} + ५$ इस से अर्थात् २८ का वर्गमूल और निरग्र मूल इन के योग से गुण देओ तो शेष $= \frac{(\sqrt{२८} - ५) \times (\sqrt{२८} + ५)}{\sqrt{२८} + ५}$ यों होगा । इस के अंश स्थान में २८ का वर्गमूल और निरग्रमूल इन के अन्तर और योग का गुणनफल है । परंतु कोई दो संख्याओं के अन्तर और योग का गुणनफल उन संख्याओं के वर्गों के अन्तर के समान होता है । (८६) प्रक्रम के दूसरे प्रकार का अनुमान देखो ।

$$\therefore \text{ शेष} = \frac{(\sqrt{२८} - ५)(\sqrt{२८} + ५)}{\sqrt{२८} + ५} = \frac{(\sqrt{२८})^२ - (५)^२}{\sqrt{२८} + ५}$$

अब किसी संख्या के वर्गमूल का वर्ग वही संख्या होगी यह अति स्पष्ट है । इस लिये $(\sqrt{२८})^२ = २८$

$$\therefore \text{ शेष} = \frac{(\sqrt{२८})^२ - (५)^२}{\sqrt{२८} + ५} = \frac{२८ - २५}{\sqrt{२८} + ५} = \frac{३}{\sqrt{२८} + ५}$$

इस के अंश और छेद में ३ का भाग देने से शेष $= \frac{१}{\frac{\sqrt{२८} + ५}{३}}$

$$\therefore \sqrt{२८} \text{ इस का भागानुबन्ध रूप} = ५ + \frac{१}{\frac{\sqrt{२८} + ५}{३}} \text{ ।}$$

अब, $\frac{\sqrt{२८} + ५}{३}$ इस छेद में २८ का निरग्र मूल ५ है इस में ५ जोड़ के १० योग में जो ३ का भाग देओ तो अभिन्न लब्धि ३ आवेगी । इस को जो $\frac{\sqrt{२८} + ५}{३}$ इस में घटा देओ तो स्पष्ट है कि यह दूसरा शेष १ से न्यून होगा ।

$$\therefore \text{ दूसरा शेष} = \frac{\sqrt{२८} + ५}{३} - ३ = \frac{\sqrt{२८} + ५}{३} - \frac{९}{३} = \frac{\sqrt{२८} + ५ - ९}{३}$$

अब, २८ के वर्गमूल में जो ५ जोड़ देओ और ९ घटा देओ तो स्पष्ट है कि उस वर्गमूल में ४ न्यून होगा ।

$\therefore$ दूसरा शेष $= \dfrac{\sqrt{२८}-४}{३}$ अब फिर इस के भी अंश और छेद को $\sqrt{२८}+४$ से गुण देओ तो वही शेष $= \dfrac{(\sqrt{२८}-४)(\sqrt{२८}+४)}{३(\sqrt{२८}+४)}$ तब

(८९) प्रक्रम के दूसरे प्रकार के अनुमान से $= \dfrac{(\sqrt{२८})^२-(४)^२}{३(\sqrt{२८}+४)} = \dfrac{२८-१६}{३(\sqrt{२८}+४)}$

$= \dfrac{१२}{३(\sqrt{२८}+४)}$ इस के अंश और छेद में १२ का भाग देने से

$$\text{दूसरा शेष} = \cfrac{१}{\cfrac{३(\sqrt{२८}+४)}{१२}} = \cfrac{१}{\cfrac{\sqrt{२८}+४}{४}}$$

$\therefore \dfrac{\sqrt{२८}+५}{३}$ इस छेद का भागानुबन्ध रूप $= ३ + \cfrac{१}{\cfrac{\sqrt{२८}+४}{४}}$ यह है

$$\text{इसी लिये } \sqrt{२८} = ५ + \cfrac{१}{३+\cfrac{१}{\cfrac{\sqrt{२८}+४}{४}}}$$

इसी प्रकार से $\dfrac{\sqrt{२८}+४}{४}$ इस छेद का भागानुबन्ध रूप $= २ + \cfrac{१}{\cfrac{\sqrt{२८}+४}{३}}$ यह

बनता है इस लिये $\sqrt{२८} = ५ + \cfrac{१}{३+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{\cfrac{\sqrt{२८}+४}{३}}}}$ इसी प्रकार से आगे भी

१५८। इस प्रकार से हर एक छेद को भागानुबन्ध का रूप देने से अवर्ग संख्या के वर्गमूल का वितत रूप बनता है। यों २८ के वर्गमूल-संबन्धि पहिले से कितने एक छेदों के भागानुबन्ध रूप ऊपर दिखलाए हुए प्रकार के अनुसार संक्षेप से सिद्ध कर के दिखलाते हैं।

$$\sqrt{२८} = ५ + \frac{\sqrt{२८} - ५}{१} = ५ + \frac{३}{\sqrt{२८} + ५} = ५ + \frac{१}{\frac{\sqrt{२८} + ५}{३}}$$

$$\frac{\sqrt{२८} + ५}{३} = ३ + \frac{\sqrt{२८} - ४}{३} = ३ + \frac{१२}{३(\sqrt{२८} + ४)} = ३ + \frac{१}{\frac{\sqrt{२८} + ४}{४}}$$

$$\frac{\sqrt{२८} + ४}{४} = २ + \frac{\sqrt{२८} - ४}{४} = २ + \frac{१२}{४(\sqrt{२८} + ४)} = २ + \frac{१}{\frac{\sqrt{२८} + ४}{३}}$$

$$\frac{\sqrt{२८} + ४}{३} = ३ + \frac{\sqrt{२८} - ५}{३} = ३ + \frac{३}{३(\sqrt{२८} + ५)} = ३ + \frac{१}{\frac{\sqrt{२८} + ५}{१}}$$

$$\frac{\sqrt{२८} + ५}{१} = १० + \frac{\sqrt{२८} - ५}{१} = १० + \frac{३}{\sqrt{२८} + ५} = १० + \frac{१}{\frac{\sqrt{२८} + ५}{३}}$$

इत्यादि ।

इस में स्पष्ट दिखाई देता है कि सब के ऊपर की पंक्ति में जो भागानुबन्ध में $\frac{\sqrt{२८} + ५}{३}$ यह छेद है यही सब के नीचे की पंक्ति में भी छेद है इस लिये इस के अनन्तर भागानुबन्ध रूप वेही होंगे जो दूसरी, तीसरी आदि पंक्तिओं में है। इस लिये (१५०) प्रक्रम से ।

$$\sqrt{२८} = ५ + \frac{१}{३+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{१०+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{१०+} \text{ इत्यादि ।}$$

यह २८ के वर्गमूल का वितत रूप है ।

१५९ । भिन्न संख्या का वितत रूप परिच्छिन्न कहिये सान्त अर्थात् उस का कहीं अन्त होता है और अवर्ग संख्या का वर्गमूल निःशेष नहीं होता प्र॰ (१४९) । इस कारण से उस का वितत रूप परिच्छिन्न नहीं होता अर्थात् उस के वितत रूप में लब्धिओं की कहीं समाप्ति नहीं होती परंतु क्रम से वेही २ लब्धि फिर २ आती हैं । इस लिये इस को आवर्त वितत रूप कहते हैं । और जितनी लब्धि फिर २ आती हैं उतनी लब्धिओं के समुदाय को आवर्तन कहते हैं ।

१६० । ऊपर (१५८) वें प्रक्रम में जो २८ के वर्गमूल-संबन्धि क्रम से छेदों के भागानुबन्ध रूप दिखलाए हैं उन को विचार पूर्वक देखने से किसी अवर्ग संख्या के वर्गमूल के वितत रूप की लब्धिओं को क्रम से जानने का एक लघु प्रकार स्पष्ट प्रकाशित होता है सो यह है ।

उद्दिष्ट अवर्ग संख्या को प्रकृति कहो । उस का जो निरग्र मूल होगा वही पहिली लब्धि है । उतना हि शेष भी जानो । और प्रकृति का निरग्र मूल लेके जो शेष बचे उस को हर कहो । तब लब्धि, शेष और हर इन तीनों को उन की तीन पंक्तिओं में लिखो ।

उस शेष में निरग्रमूल जोड़ के योग में हर का भाग देओ । जो उस में अभिन्न फल होगा वही दूसरी लब्धि होगी । इस लब्धि से पूर्व हर को गुण के गुणनफल में पूर्व शेष घटा देओ सो अन्तर दूसरा शेष होगा । इस शेष के वर्ग को प्रकृति में घटा देने से जो अन्तर बचे उस में पूर्व हर का भाग देओ फल दूसरा हर होगा ।

फिर जिस प्रकार से पहिले लब्धि, शेष और हर से दूसरे लब्धि, शेष और हर उत्पन्न किये हैं उसी प्रकार से उन दूसरों से तीसरे लब्धि, शेष और हर जानो । इसी प्रकार से आगे भी जब वेही लब्धि, शेष और हर क्रम से फिर आवें तब तक करो ।

इस प्रकार से अवर्ग संख्या के वर्गमूल के वितत रूप की लब्धिओं का ज्ञान बहुत लाघव से होता है । तब (१५०) प्रक्रम से उस के वितत रूप का ज्ञान तुरंत होगा ।

जैसा । २८ इस संख्या के वर्गमूल की लब्धि ऊपर के प्रकार से कहो ।

यहां ऊपर के प्रकार से ये नीचे लिखे हुए लब्धि, शेष और हर उत्पन्न होते हैं ।

लब्धि	५	३,	२,	३,	१०,	३,	इत्यादि	यों आगे भी लब्धि आदि वेही
शेष	५	४,	४,	५,	५,	४,	"	फिर २ आवेंगे ।
हर	३	४,	३,	१,	३,	४,	"	

इस प्रकार से यहां क्रम से ५, ३, २, ३, १०, ३ इत्यादि लब्धि आती हैं । इस लिये (१५०) प्रक्रम से

$$\sqrt{२८} = ५ + \frac{१}{३+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{१०+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{२+}\text{ इत्या० यह } \sqrt{२८} \text{ का}$$

वितत रूप है ।

१६१ । जब की ऊपर के प्रक्रम से किसी अवर्ग संख्या के वर्गमूल के लब्धियों का ज्ञान शीघ्र होता है तब (१५४) प्रक्रम के अनुसार उन लब्धियों से उस अवर्ग संख्या के वर्गमूल के आसन्न मान शीघ्र ज्ञात होंगे । येही आसन्न मान उस अवर्ग संख्या के आसन्न मूल हैं । और ये सब मूल उत्तरोत्तर सूक्ष्म अर्थात् वास्तव मूल के पास २ होते हैं प्र॰ (१५२) । और इस में जितने विषम अर्थात् १ ला, ३ रा, ५ वां इ-त्यादि हैं सेा वास्तव मूल से छोटे हैं और जो सम अर्थात् २ रा, ४ था, ६ वां इत्यादि हैं वे सब वास्तव मूल से बड़े होते हैं प्र॰ (१५३) ।

जैसा । २८ के वर्गमूल की लब्धि ५, ३, २, ३, १०, ३ इत्यादि ऊपर सिद्ध किई हैं ।

इस लिये लब्धि ५, ३, २, ३, १०, ३, इत्यादि

और (१५४) प्रक्रम से आसन्न मूल अर्थात् २८ के आसन्न मूल $\left\{ \frac{\text{५}}{\text{१}}, \frac{\text{१६}}{\text{३}}, \frac{\text{३७}}{\text{७}}, \frac{\text{१२७}}{\text{२४}}, \frac{\text{१३०७}}{\text{२४७}}, \frac{\text{४०४८}}{\text{७६५}} \right.$.

इन आसन्न मूलों में $\frac{\text{५}}{\text{१}}$ अर्थात् ५ यह २८ का वर्गमूल सब से स्थूल है । इस से $\frac{\text{१६}}{\text{३}}$ यह सूक्ष्म है । इस से भी $\frac{\text{३७}}{\text{७}}$ यह सूक्ष्म है । इसी भांति और भी जानो प्र॰ (१५२) । और २८ के वास्तव मूल से ५ यह छोटा है, $\frac{\text{१६}}{\text{३}}$ बड़ा है, $\frac{\text{३७}}{\text{७}}$ छोटा है इसी भांति आगे भी प्र॰(१५३) ।

और जब कि २८ का वास्तव मूल परिछिन्न नहीं है अर्थात् वह किसी संख्या से नहीं दिखला जा सकता प्र॰(१४७) । इस लिये जिस आसन्न मूल का वर्ग २८ के अधिक पास और छोटा वा बड़ा होगा वही आसन्न मूल वास्तव मूल के अधिक पास और छोटा वा बड़ा होगा यह स्पष्ट है । यह सब गणित करके दिखलाते हैं ।

जैसा । $\because (\text{५})^{\text{२}} = \text{२५} < \text{२८} \quad \therefore \text{५} < \sqrt{\text{२८}}$ ।

$$\because \left(\frac{\text{१६}}{\text{३}}\right)^{\text{२}} = \frac{\text{२५६}}{\text{९}} = \text{२८}\frac{\text{४}}{\text{९}} > \text{२८} \quad \therefore \frac{\text{१६}}{\text{३}} > \sqrt{\text{२८}} \text{ ।}$$

$$\because \left(\frac{\text{३७}}{\text{७}}\right)^{\text{२}} = \frac{\text{१३६९}}{\text{४९}} = \text{२८} - \frac{\text{३}}{\text{४९}} < \text{२८} \quad \therefore \frac{\text{३७}}{\text{७}} < \sqrt{\text{२८}} \text{ ।}$$

$$\because \left(\frac{\text{१२७}}{\text{२४}}\right)^{\text{२}} = \frac{\text{१६१२९}}{\text{५७६}} = \text{२८}\frac{\text{१}}{\text{५७६}} > \text{२८} \therefore \frac{\text{१२७}}{\text{२४}} > \sqrt{\text{२८}} \text{ ।}$$

$$\because \left(\frac{\text{१३०७}}{\text{२४७}}\right)^{\text{२}} = \frac{\text{१७०८२४९}}{\text{६१००९}} = \text{२८} - \frac{\text{३}}{\text{६१००९}} < \text{२८} \therefore \frac{\text{१३०७}}{\text{२४७}} < \sqrt{\text{२८}} \text{ ।}$$

$$\because \left(\frac{\text{४०३८}}{\text{७६५}}\right)^{\text{२}} = \frac{\text{१६३८६३०४}}{\text{५८५२२५}} = \text{२८}\frac{\text{४}}{\text{५८५२२५}} < \text{२८} \therefore \frac{\text{४०४८}}{\text{७६५}} > \sqrt{\text{२८}} \text{ ।}$$

इत्यादि ।

इस से इस प्रक्रम में कहा हुआ अर्थ स्पष्ट प्रकाशित होता है ।

अवर्ग संख्या के आसन्न मूल जानने का यह भी एक अच्छा प्रकार है । और वस्तुतः अवर्ग संख्या के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देने का मुख्य प्रयोजन यही है ।

उदा० (१) १३ इस संख्या के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देओ और उस के आसन्न मान कहो ।

यहां (१६०) प्रक्रम से

लब्धि	३	१, १, १, १, ६	१, इत्यादि
शेष	३	१, २, १, ३, ३	१, "
हर	४	३, ३, ४, १, ४	३, "

इस प्रकार से यहां लब्धि क्रम से ३, १, १, १, १, ६, १, इत्यादि हैं । इस लिये (१५०) प्रक्रम से

$\sqrt{१३} = ३ + \frac{१}{१+}\ \frac{१}{१+}\ \frac{१}{१+}\ \frac{१}{१+}\ \frac{१}{६+}\ \frac{१}{१+}$ इत्यादि । यह १३ के वर्गमूल का वितत भिन्न संख्या का रूप है ।

और ∵ लब्धि ३, १, १, १, १, ६, १, इत्यादि हैं

∴ आसन्न मान $\frac{३}{१}, \frac{४}{१}, \frac{७}{२}, \frac{११}{३}, \frac{१८}{५}, \frac{११९}{३३}, \frac{१३७}{३८}$ "

ये ही आसन्न मान १३ के आसन्न मूल हैं और उत्तरोत्तर १३ के वास्तव मूल के पास २ हैं ।

अथवा प्रथम लब्धि के स्थान में ० रख के आसन्न मान सिद्ध करो और उन सभों में प्रथम लब्धि जोड़ देओ । वे योग सब आसन्न मूल होंगे । इस प्रकार से गणित में कुछ लाघव होगा ।

जैसा । लब्धि ०, १, १, १, १, ६, १, इत्यादि

आसन्न मान $\frac{०}{१}, \frac{१}{१}, \frac{१}{२}, \frac{२}{३}, \frac{३}{५}, \frac{२०}{३३}, \frac{२३}{३८},$ "

इस लिये ३, ४, $३\frac{१}{२}$, $३\frac{२}{३}$, $३\frac{३}{५}$, $३\frac{२०}{३३}$, $३\frac{२३}{३८}$ इत्यादि आसन्न मूल ऊपर सिद्ध किये हुए आसन्न मूलों के समान हैं ।

उदा० (२) १९ इस संख्या के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देओ और उस के आसन्न मान कहो

यहां लब्धि ४ | २, १, ३, १, २, ८, | २ इत्यादि
शेष ४ | २, ३, ३, २, ४, ४, २ "
हर ३ | ५, २, ५, ३, १, ३, | ५ "

$\therefore \sqrt{१९} = ४ + \frac{१}{१+} \frac{१}{१+} \frac{१}{३+} \frac{१}{१+} \frac{१}{२+} \frac{१}{८+} \frac{१}{२+}$ इत्यादि । यह १९ के वर्गमूल का वितत भिन्न संख्या का रूप है ।

और प्रथम लब्धि के स्थान में ० रखने से

लब्धि ०, २, १, ३, १, २, ८, २, इत्यादि

आसन्न मान $\frac{०}{१}, \frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{४}{११}, \frac{५}{१४}, \frac{१४}{३९}, \frac{११७}{३२६}, \frac{२४८}{६९१},$ "

इस लिये $४, ४\frac{१}{२}, ४\frac{१}{३}, ४\frac{४}{११}, ४\frac{५}{१४}, ४\frac{१४}{३९}, ४\frac{११७}{३२६}, ४\frac{२४८}{६९१}$ इत्या० आसन्न मान १९ इस संख्या के आसन्न मूल हैं ।

१६२ । (१५७) वे प्रक्रम से लेके यहां तक अभिन्न अवर्ग संख्या के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देने का प्रकार दिखलाया । अब इस प्रक्रम में भिन्न अवर्ग संख्या के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देने का प्रकार दिखलाते हैं ।

मानो $\frac{७}{५}$ इस भिन्न संख्या के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देना है तब पहिले इस के अंश और छेद को छेद ही से गुण देओ तो भी उस के मान में कुछ भेद न होगा । प्र॰ (१२५)

जैसा । $\frac{७}{५} = \frac{७ \times ५}{५ \times ५} = \frac{३५}{२५}$

$\therefore \sqrt{\frac{७}{५}} = \sqrt{\frac{३५}{२५}} = \frac{\sqrt{३५}}{५}$ । प्र॰(१४६)

तब (१५८) वे प्रक्रम में जैसे २८ के वर्गमूल-संबन्धि छेदों के भागानुबन्ध रूप संक्षेप से सिद्ध कर के दिखलाए हैं वैसे हि यहां $\frac{\sqrt{३५}}{५}$ इस में दिखलाते हैं । सो ऐसे

$$\sqrt{\frac{७}{५}} = \frac{\sqrt{३५}}{५} = १ + \frac{\sqrt{३५} - ५}{५} = १ + \frac{१०}{५(\sqrt{३५} + ५)} = १ + \frac{१}{\frac{\sqrt{३५} + ५}{२}}$$

$$\frac{\sqrt{३५} + ५}{२} = ५ + \frac{\sqrt{३५} - ५}{२} = ५ + \frac{१०}{२(\sqrt{३५} + ५)} = ५ + \frac{१}{\frac{\sqrt{३५} + ५}{५}}$$

$$\frac{\sqrt{३५}+५}{५} = २ + \frac{\sqrt{३५}-५}{५} = २ + \frac{१०}{५(\sqrt{३५}+५)} = २ + \frac{१}{\frac{\sqrt{३५}+५}{२}}$$

इत्यादि ।

इस से स्पष्ट है कि सब के ऊपर की पंक्ति में जो भागानुबन्ध में $\frac{\sqrt{३५}+५}{२}$ यह छेद है वही सब के नीचे की पंक्ति में भी छेद है । इस लिये इस के उपरान्त भी भागानुबन्ध रूप वेही होंगे जो दूसरी आदि पंक्तिओं में है । इस लिये (१५०) वे प्रक्रम से

$$\sqrt{\frac{७}{५}} = १ + \frac{१}{५+} \frac{१}{२+} \frac{१}{५+} \frac{१}{२+} \frac{१}{५+} \text{ इत्यादि ।}$$

यह $\frac{७}{५}$ के वर्गमूल का वितत रूप है ।

१६३ । इस ऊपर के प्रकार को देखने से किसी भिन्न अवर्ग संख्या के वर्गमूल के वितत रूप की लब्धिओं को जानने का यह एक सुलभ प्रकार स्पष्ट होता है ।

जिस भिन्न अवर्ग संख्या के वर्गमूल का वितत रूप जानना हो उस के अंश और छेद के गुणनफल को यहां प्रकृति मानो । इस के निरग्र मूल में अवर्ग संख्या के छेद का भाग देने से जो अभिन्न फल आवे वही पहिली लब्धि और उस का और छेद का गुणनफल पहिला शेष जानो और इस शेष के वर्ग को प्रकृति में घटा देने से जो अन्तर हो उस में उसी छेद का भाग देओ जो फल आवेगा वही पहिला हर जानो । फिर (१६०) वे प्रक्रम में जो प्रकार लिखा है उस के अनुसार इन प्रथम लब्धि, शेष और हर से और २ लब्धि, शेष और हर उत्पन्न करो ।

जैसा । $\frac{७}{५}$ इस के वर्गमूल की लब्धिओं को जानना है ।

तब यहां ऊपर के प्रकार से ७ × ५ = ३५ यह प्रकृति है और लब्धि, शेष और हर ये नीचे लिखे हुए उत्पन्न होते हैं ।

लब्धि	१	५, २,	५ इत्यादि
शेष	५	५, ५,	५ "
हर	२	५, २,	५ "

इस प्रकार से यहां क्रम से १, ५, २, ५, २ इत्यादि लब्धि आती हैं ।

इस लिये

$$\sqrt{\frac{७}{५}} = १ + \frac{१}{५+} \frac{१}{२+} \frac{१}{५+} \frac{१}{२+} \text{ इत्यादि ।}$$

और जब कि लब्धि । १, ५, २, ५, २, इत्यादि ।

इस लिये आसन्न मान । $\frac{१}{१}, \frac{६}{५}, \frac{१३}{११}, \frac{७१}{६०}, \frac{१५५}{१३१}$ इत्यादि ।

ये ही आसन्न मान $\frac{७}{५}$ इस भिन्न संख्या के आसन्न मूल हैं ।

उदा० (१) $\frac{११}{७}$ इस भिन्न संख्या के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देओ और उस के आसन्न मान कहो ।

यहां ११ × ७ = ७७ यह प्रकृति है और

लब्धि	१	३,	१,	१६	१,	३,	२,	३, इत्यादि ।
शेष	७	५,	८,	८,	५,	७,	७,	५, "
हर	४	१३,	१,	१३,	४,	७,	४,	१३, "

$$\therefore \sqrt{\frac{११}{७}} = १ + \frac{१}{३+}\ \frac{१}{१+}\ \frac{१}{१६+}\ \frac{१}{१+}\ \frac{१}{३+}\ \frac{१}{२+}\ \frac{१}{३+}$$ इत्यादि ।

और जिस लिये लब्धि । १, ३, १, १६, १, ३ इत्यादि ।

इस लिये आसन्न मान । $\frac{१}{१}, \frac{४}{३}, \frac{५}{४}, \frac{८४}{६७}, \frac{८९}{७१}, \frac{३५१}{२८०}$ "

ये ही $\frac{११}{७}$ के आसन्न मूल हैं ।

अथवा प्रथम लब्धि के स्थान में ० रखने से

लब्धि । ०, ३, १, १६, १, ३, इत्यादि ।

आसन्न मान । $\frac{०}{१}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१७}{६७}, \frac{१८}{७१}, \frac{७१}{२८०}$ "

इन में प्रथम लब्धि १ जोड देने से

$१, १\frac{१}{३}, १\frac{१}{४}, १\frac{१७}{६७}, १\frac{१८}{७१}, १\frac{७१}{२८०}$ इत्यादि सब पूर्व आसन्न मूलों के समान हि हैं ।

उदा० (२) $\frac{५}{८}$ इस भिन्न संख्या के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देओ और उस के आसन्न मान कहो ।

यहां ५ × ८ = ४० यह प्रकृति है । और

लब्धि	०, १	३,	१,	३,	२	३	इत्यादि ।
शेष	०, ५	४,	४,	५,	५	४	"
हर	५, ३	८,	३,	५,	३	८	"

$$\therefore \sqrt{\frac{५}{८}} = \frac{१}{१+}\ \frac{१}{३+}\ \frac{१}{१+}\ \frac{१}{३+}\ \frac{१}{२+}\ \frac{१}{३+}\ \frac{१}{१+}\ \frac{१}{३+}$$ इत्यादि । यह वितत रूप है ।

और जब कि लब्धि । ०, १, ३, १, ३, २, ३, इत्यादि हैं

∴ आसन्न मान । $\frac{०}{१}, \frac{१}{१}, \frac{३}{४}, \frac{४}{५}, \frac{१५}{१९}, \frac{३४}{४३}, \frac{११७}{१४८}$ "

इस लिये ०, १, $\frac{३}{४}, \frac{४}{५}, \frac{१५}{१९}$ इत्यादि ये सब $\frac{५}{८}$ के आसन्न मूल हैं।

१६४। इस प्रक्रम में किसी भिन्न संख्या के और अवर्ग संख्या के वर्गमूल के वितत रूप के संबन्धि कुछ गुण लिखते हैं।

(१) वितत भिन्न संख्या के आसन्न मान सब लघुतम रूप में होते हैं अर्थात् हर एक आसन्न मान के अंश और छेद परस्पर दृढ होते हैं।

(२) आसन्न मानों की पंक्ति में हर एक पास२ के दो आसन्न मानों के अन्तर का अंश १ होता है और उन दो आसन्न मानों के छेदों का गुणनफल उस अन्तर का छेद होता है।

(३) भिन्न संख्या के आसन्न मानों में किसी आसन्न मान का और मुख्य भिन्न संख्या का अन्तर उस भिन्न संख्या से कभी बड़ा नहीं होता जिस भिन्न संख्या का अंश १ है और उस आसन्न मान का छेद और उस के उत्तर आसन्न मान का छेद इन दोनों छेदों के गुणनफल के समान जिस का छेद है।

जैसा। $\frac{१३८}{१०७}$ इस भिन्न संख्या की

लब्धि । १, ३, २, ४, १, २ ।

आसन्न मान। $\frac{१}{१}, \frac{४}{३}, \frac{९}{७}, \frac{४०}{३१}, \frac{४९}{३८}, \frac{१३८}{१०७}$।

इस लिये इस में $\frac{१३८}{१०७}$ इस संख्या का और

१ का अन्तर $= \frac{३१}{१०७}$ यह $\frac{१}{१\times ३}$ अर्थात् $\frac{१}{३}$ से बड़ा नहीं है।

$\frac{४}{३}$ " $= \frac{१४}{३२१}$ " $\frac{१}{३\times ७}$ " $\frac{१}{२१}$ "

$\frac{९}{७}$ " $= \frac{३}{७४९}$ " $\frac{१}{७\times ३१}$ " $\frac{१}{२१७}$ "

$\frac{४०}{३१}$ " $= \frac{२}{३३१७}$ " $\frac{१}{३१\times ३८}$ " $\frac{१}{११७८}$ "

और $\frac{४९}{३८}$ " $= \frac{१}{४०१६}$ " $\frac{१}{३८\times १०७}$ " $\frac{१}{४०१६}$ "

(४) किसी भिन्न संख्या का वा अवर्ग संख्या के वर्गमूल का कोइ आसन्न मान जो जितना उस भिन्न संख्या के वा उस वर्गमूल के निकट होता है उतनी निकट कोइ और भिन्न संख्या नहीं हो सकती जिस के अंश और छेद उस आसन्न मान के अंश और छेद से छोटे हों ।

जैसा । $\frac{१३८}{१०७}$ इस भिन्न संख्या के

आसन्न मान $\frac{१}{१}$, $\frac{४}{३}$, $\frac{९}{७}$, $\frac{४०}{३१}$, और $\frac{४९}{३८}$ ये हैं ।

इन में $\frac{४०}{३१}$ यह कोइ एक आसन्न मान है । यह जितना $\frac{१३८}{१०७}$ इस संख्या के निकट है इतनी और कोइ भिन्न संख्या नहीं हो सकती जिस के अंश और छेद $\frac{४०}{३१}$ इस के अंश और छेद से छोटे हों ।

इसी भांति २८ के वर्गमूल के

आसन्न मान $\frac{५}{१}$, $\frac{१६}{३}$, $\frac{३७}{७}$, $\frac{१२७}{२४}$ इत्यादि हैं

इन में $\frac{३७}{७}$ यह एक आसन्न मान जितना २८ के वर्गमूल के पास है उतनी कोइ और भिन्न संख्या नहीं है जिस के अंश और छेद $\frac{३७}{७}$ इस के अंश और छेद से छोटे हों ।

(५) १ से बड़ी अवर्ग संख्या के वर्गमूल की लब्धिओं में पहिली लब्धि छोड के दूसरी से आवर्तन का आरम्भ होता है । और हर एक आवर्तन में अन्त की लब्धि प्रथम लब्धि से दूनी होती है । और आवर्तन में उपान्तिम अर्थात् अन्त के पास की जो लब्धि है उस का हर उस अवर्ग संख्या के छेद के समान होता है ।

(६) अवर्ग संख्या के वर्गमूल के किसी आसन्न मान के वर्ग का और उस अवर्ग संख्या का अन्तर करो । तो वह आसन्न मान जिन लब्धिओं का होगा उन में अन्त की लब्धि का हर उस अन्तर का अंश होगा और उस आसन्न मान के छेद के वर्ग का और उस अवर्ग संख्या के छेद का गुणनफल उस अन्तर का छेद होगा ।

जैसा । २८ के वर्गमूल को

लब्धि	५,	३,	२,	३,	१०	इत्यादि
हर	३	४	३	१	३	"

आसन्न मान $\frac{५}{१}, \frac{१६}{३}, \frac{३७}{७}, \frac{१२७}{२४}, \frac{१३०७}{२४७}$ "

इन में $\frac{१२७}{२४}$ यह कोई एक आसन्न मान है।

$\therefore \left(\frac{१२७}{२४}\right)^२ - २८ = \frac{१६१२९}{५७६} - २८ = \frac{१}{५७६}$ यह अन्तर है। इस में अंश और छेद ऊपर लिखने के अनुसार हैं।

इसी भांति $\frac{११}{७}$ के वर्गमूल को

लब्धि	१,	३,	१,	१६	इत्यादि
हर	४,	१३,	१,	१३,	"

आसन्न मान। $\frac{१}{१}, \frac{४}{३}, \frac{५}{४}, \frac{८४}{६७}$ "

इस में $\frac{५}{४}$ एक आसन्न मान है

$\therefore \frac{११}{७} - \left(\frac{५}{४}\right)^२ = \frac{११}{७} - \frac{२५}{१६} = \frac{१७६ - १७५}{११२} = \frac{१}{११२}$ इस अन्तर के भी अंश और छेद उक्त के अनुसार हैं।

इन छ गुणों की उपपत्ति बीजगणित से स्पष्ट होती है।

अभ्यास के लिये उदाहरण ।

(१) $\frac{५५}{८५}, \frac{१३७}{९९}, \frac{५२७}{३८५}, \frac{७३०९}{२५७८}$ और $\frac{८४२९}{१५४०९}$ इन भिन्न संख्याओं को वितत भिन्न संख्या का रूप देओ।

क्रम से उत्तर। $\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{२}$ ।

$१ + \frac{१}{२+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{७}$ ।

$१ + \frac{१}{२+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{६+}\,\frac{१}{३}$ ।

$२ + \frac{१}{१+}\,\frac{१}{५+}\,\frac{१}{१५+}\,\frac{१}{५+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{२}$ ।

और $\frac{१}{१+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{५+}\,\frac{१}{७+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{५}$ ।

(२) $\frac{१००}{६३}$, $\frac{३५९}{४२०}$, $\frac{८६७}{१७५३}$, और $\frac{१४४००}{५३११}$ इन भिन्न संख्याओं के क्रम से आसन्न मान कहो ।

उत्तर । १, २, $\frac{३}{२}$, $\frac{८}{५}$, $\frac{१९}{१२}$ और $\frac{२७}{१७}$ ।

०, १, $\frac{५}{६}$, $\frac{१६}{१९}$, $\frac{२१}{२५}$, $\frac{३७}{४४}$, $\frac{९५}{११३}$ और $\frac{१३२}{१५७}$ ।

०, $\frac{१}{२}$, $\frac{४५}{९१}$, $\frac{४६}{९३}$, $\frac{९१}{१८४}$, $\frac{१३७}{२७७}$ और $\frac{३६५}{७३८}$ ।

और २, ३, $\frac{८}{३}$, $\frac{१९}{७}$, $\frac{१२२}{४५}$, $\frac{१४१}{५२}$, $\frac{२६३}{९७}$, $\frac{१९८२}{७३१}$ और $\frac{६२०९}{२२९०}$ ।

(३) $\frac{१३९}{५१}$ इस भिन्न संख्या का चौथा, $\frac{१०३}{३७४}$ इस का पांचवा और $\frac{४३६}{१६९}$ इस का सातवां आसन्न मान कहो ।

क्रम से उत्तर । $\frac{११}{४}$, $\frac{३}{११}$ और $\frac{४९}{१९}$ ।

(४) ७, २३, ५७, ८९ और १३७ इन संख्याओं के वर्गमूल को वितत भिन्न संख्या का रूप देओ ।

उत्तर $\sqrt{७} = २ + \frac{१}{१+}\frac{१}{१+}\frac{१}{१+}\frac{१}{४+}\frac{१}{१+}$ इत्यादि ।

$\sqrt{२३} = ४ + \frac{१}{१+}\frac{१}{३+}\frac{१}{१+}\frac{१}{८+}\frac{१}{१+}\frac{१}{३+}$ इत्यादि ।

$\sqrt{५७} = ७ + \frac{१}{१+}\frac{१}{१+}\frac{१}{४+}\frac{१}{१+}\frac{१}{१+}\frac{१}{१४+}\frac{१}{१+}$ इत्यादि ।

$\sqrt{८९} = ९ + \frac{१}{२+}\frac{१}{३+}\frac{१}{३+}\frac{१}{२+}\frac{१}{१८+}\frac{१}{२+}\frac{१}{३+}$ इत्यादि ।

और $\sqrt{१३७} = ११ + \frac{७}{१+}\frac{१}{२+}\frac{१}{२+}\frac{१}{१+}\frac{१}{१+}\frac{१}{२+}\frac{१}{२+}\frac{१}{१+}\frac{१}{२२+}\frac{१}{१+}$ इ० ।

(५) २९ इस संख्या के वर्गमूल के पांच आसन्न मान, ५७ के वर्गमूल के छ, १०८ के वर्गमूल के आठ और २७६ के वर्गमूल के बारह आसन्न मान कहो ।

क्रम से उत्तर । ५, $५\frac{१}{२}$, $५\frac{१}{३}$, $५\frac{२}{५}$ और $५\frac{५}{१३}$ ।

७, ८, $७\frac{१}{२}$, $७\frac{५}{९}$, $७\frac{६}{११}$ और $७\frac{११}{२०}$ ।

१०, $१०\frac{१}{२}$, $१०\frac{१}{३}$, $१०\frac{२}{५}$, $१०\frac{९}{२३}$, $१०\frac{११}{२८}$, $१०\frac{२०}{५१}$ और $१०\frac{५१}{१३०}$ ।

और १६, १७, $१६\frac{१}{२}$, $१६\frac{२}{३}$, $१६\frac{३}{५}$, $१६\frac{८}{१३}$, $१६\frac{१९}{३१}$, $१६\frac{४६}{७५}$, $१६\frac{६५}{१०६}$, $१६\frac{१११}{१८१}$, $१६\frac{१७६}{२८७}$ और $१६\frac{२८७}{४६८}$ ।

(६) १५, ३३, १०३ और १७९ इन संख्याओं के वर्गमूल का क्रम से चौथा, पांचवां, छठवां और सातवां आसन्न मान कहो ।

उत्तर, $३\frac{७}{८}$, $५\frac{३२}{४३}$, $१०\frac{७}{४७}$ और $१३\frac{५८}{१५३}$ ।

(७) $\frac{१}{२}$, $\frac{१०}{७}$ और $\frac{७}{१३}$ इन भिन्न संख्याओं के वर्गमूल को विततभिन्न संख्या का रूप देओ ।

उत्तर, $\sqrt{\frac{१}{२}} = \frac{१}{१+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{२+}$ इत्यादि ।

$\sqrt{\frac{१०}{७}} = १ + \frac{१}{५+}\,\frac{१}{८+}\,\frac{१}{५+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{५+}\,\frac{१}{८+}$ इत्यादि ।

और $\sqrt{\frac{७}{१३}} = \frac{१}{१+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{९+}\,\frac{१}{३+}\,\frac{१}{१+}\,\frac{१}{२+}\,\frac{१}{१+}$ इत्यादि ।

(८) $\frac{३}{५}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{६}{११}$ और $\frac{२१}{५}$ इन में हर एक भिन्न संख्या के वर्गमूल का पांचवां आसन्न मान कहो ।

उत्तर, $\frac{२४}{३१}$, $\frac{२२०}{२४१}$, $\frac{१४}{१९}$ और $२\frac{३२८}{६६४१}$ ।

(९) १२३ इस संख्या के वर्गमूल के चौथे आसन्न मान के वर्ग का और इस संख्या का अन्तर क्या है?

उत्तर, $\frac{१}{७२०३८५६}$ ।

१९५ । पहिले अध्याय में (१०३) प्रक्रम में जो विलोमविधि का गणित अभिन्न संख्याओं के लिये दिखलाया वही भिन्न संख्या पर भी लगता है । परंतु जहां कोइ संख्या अपने हि किसी अंश से अधिक वा न्यून होने से अमुक फल होता है उस फल पर से वह संख्या कहो । ऐसे प्रकार का विलोम विधि का प्रश्न हो वहां उस संख्या के जानने का प्रकार (१०३) प्रक्रम में नहीं दिखलाया । क्यों कि यह प्रश्न केवल भिन्नगणित संबन्धि है । इस लिये इस प्रकार के प्रश्नों का उत्तर जानने का गणितप्रकार अब दिखलाते हैं ।

रीति । यहां प्रश्न में संख्या का जो अंश उस में जुड़ा वा घटा हुआ होगा उस अंशात्मक भिन्न संख्या के अंश को क्रम से उस के छेद में जोड़ वा घटा देओ । और उस योग वा अन्तर को नया छेद

कहो और अंश ही नया अंश समझो। तब इस नये अंश और छेद से जो भिन्न संख्या बनेगी उतने उस दृश्य के अर्थात् अन्तिम फल के अंश को क्रम से उसी दृश्य में घटा देओ वा जोड़ देओ। वह अन्तर वा योग अभीष्ट संख्या होगी।

उदा० (१) वह संख्या क्या है कि जिस के $\frac{३}{७}$ उसी संख्या में जोड़ देओ तो योग २० होता है?

यहां अभीष्ट संख्या का अंश $\frac{३}{७}$ है और इस लिये $\frac{३}{७+३}$ अर्थात् $\frac{३}{१०}$ ये नये अंश और छेद हैं। और दृश्य २० है।

तब ऊपर की रीति से $२० - \frac{३}{१०}$ स्व, यह अभीष्ट संख्या का मान होगा।

∴ स्वांशापवाह की रीति से $२० - \frac{३}{१०}$ स्व $= \frac{२० \times ७}{१०} = १४$ यही अभीष्ट संख्या है।

उदा० (२) वह संख्या क्या है जिस के $\frac{३}{७}$ उसी में घटा देओ तो शेष ८ बचता है?

यहां अभीष्ट संख्या का अंश $\frac{३}{७}$ है और इसी लिये $\frac{३}{७-३}$ अर्थात् $\frac{३}{४}$ ये नये अंश और छेद हैं और दृश्य ८ है।

इस लिये ऊपर की रीति से, $८ + \frac{३}{४}$ स्व, यह अभीष्ट संख्या का मान है।

∴ स्वांशानुबन्ध की रीति से, $८ + \frac{३}{४}$ स्व $= \frac{८ \times ७}{४} = १४$ यही अभीष्ट संख्या है।

इस प्रकार की उपपत्ति।

मानो १४ यह एक कोई संख्या है। यह अपने $\frac{७}{७}$ के समान है यह तो अति स्पष्ट है। इस में जो इसी के $\frac{३}{७}$ जोड़ देओ तो योग में इसी के $\frac{७+३}{७}$ अर्थात् $\frac{१०}{७}$ होंगे। और वह योग २० है। और जब कि २० में १४ के ७ + ३ अर्थात् १० सप्तमांश हैं तब स्पष्ट है कि जो १४ का $\frac{१}{७}$ है वही २० का $\frac{१}{१०}$ है और इसी लिये जो १४ के $\frac{३}{७}$ हैं वही २० के $\frac{३}{१०}$ अर्थात् $\frac{३}{७+३}$ इस लिये जो १४ में उसी के $\frac{३}{७}$ जोड़ देने से २० होते हैं तो २० में उस के $\frac{३}{१०}$ घटा देने से १४ होंगे।

दूसरो प्रकार से । १४ में जो इसी के $\frac{३}{७}$ घटा देओ तो अन्तर में इसी के $\frac{७-३}{७}$ अर्थात् $\frac{४}{७}$ रहेंगे । और वह अन्तर ८ है । और जब कि ८ में १४ के ४ सप्तमांश हैं तब स्पष्ट है कि १४ का जो $\frac{१}{७}$ वही ८ का $\frac{१}{४}$ है । और इसी लिये जो १४ के $\frac{३}{७}$ हैं वेही ८ के $\frac{३}{४}$ अर्थात् $\frac{३}{७-३}$ अंश हैं । इस लिये जो १४ में उसी के $\frac{३}{७}$ घटा देने से ८ बचते हैं तो ८ में उसी के $\frac{३}{४}$ अर्थात् $\frac{३}{७-३}$ अंश जोड़ देने से १४ होंगे ।

इस से प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

१६६ । अब इस प्रक्रम में भिन्नगणित संबन्धि प्रश्न उन के गणित समेत कुछ लिख के इस अध्याय को समाप्त करते हैं ।

(१) एक मनुष्य को एक वर्ष में जितनी प्राप्ति थी उस का $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$ और $\frac{१}{६}$ अलग २ चार कामों में व्यय करता था तो बताओ कि हर बरस में उस के पास प्राप्ति का कितना अंश शेष बचता था?

यहां $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$ और $\frac{१}{६}$ इन का योग $\frac{१९}{२०}$ इतना उस के प्राप्ति का अंश व्यय होता था । इस लिये $१ - \frac{१९}{२०} = \frac{१}{२०}$ यह प्राप्ति का अंश अर्थात् प्राप्ति का बीसवां भाग उस के पास शेष बचता था । यह उत्तर ।

(२) हाट में ३ पैसे को १३ आंब मोल मिलते हैं तो १५ पैसे को कितने आंब मिलेंगे कहो ।

यहां पहिले ३ पैसे को १३ आंब मिलते हैं तो १ पैसे को कितने आवेंगे? यों केवल भागहार का प्रश्न उत्पन्न कर के भागहार की रीति से १ पैसे के आंब $१३ \div ३ = \frac{१३}{३}$ यह फल उत्पन्न करो । तब फिर १ पैसे को $\frac{१३}{३}$ आंब तो १५ पैसे को कितने मिलेंगे? इस केवल गुणन के प्रश्न का उत्तर गुणन की रीति से $\frac{१३}{३} \times १५ = ६५$ यह होगा। इस लिये १५ पैसे को ६५ आंब मिलेंगे । यह प्रश्न का उत्तर सिद्ध हुआ ।

दूसरो प्रकार से इस प्रश्न के सजातीय और प्रश्नों के भी उत्तर जान लेओ ।

(३) जो ५ रुपये को ६७ सेर चांवल मोल मिलते हैं तो ६० रुपये को कितने मिलेंगे ?

यहां पहिले ५ रुपये को ६७ सेर तो १ रुपये को $६७ \div ५ = \frac{६७}{५}$ सेर मिलेंगे । यह जान के फिर १ रुपये को $\frac{६७}{५}$ सेर तो ६० रुपये को $\frac{६७}{५} \times ६० = ८०४$ सेर मिलेंगे । यह जानो । यही उत्तर है ।

(४) जो कोई एक काम ४ मनुष्य ९ दिन में बनाते हैं तो उतना ही काम ६ मनुष्य कितने दिन में बनावेंगे?

यहां पहिले, जो काम ४ मनुष्य ९ दिन में बनाते हैं तो १ मनुष्य कितने दिन में बनावेगा? यों सोचने से तुरंत मन में आवेगा कि गुणन की रीति से वह काम १ मनुष्य ४×९ अर्थात् ३६ दिन में बनावेगा । तब फिर १ मनुष्य ३६ दिन में जो काम करेगा वह ६ मनुष्य कितने दिन में बनावेंगे? इस का उत्तर केवल भागहार की रीति से स्पष्ट है कि $३६ \div ६$ अर्थात् ६ दिन में वह काम बनावेंगे ।

(५) अ और क दो मनुष्य थे । कोई एक काम अ मनुष्य १० दिन में बनाता था और क मनुष्य वही काम १५ दिन में करता था । तो अ और क दोनों मिल के वह काम कितने दिन में पूरा करेंगे?

यहां पहिले, केवल भागहार की रीति से यह सिद्ध होता है कि अ मनुष्य १ दिन में उस काम का $\frac{१}{१०}$ करता है और क मनुष्य $\frac{१}{१५}$ करता है । इस लिये $\frac{१}{१०} + \frac{१}{१५} = \frac{१}{६}$ अर्थात् अ और क दोनों मिल के एक दिन में उस काम का $\frac{१}{६}$ बनाते हैं । तब जो $\frac{१}{६}$ काम बनाने में १ दिन लगता है तो १ काम पूरा बनाने के लिये कितने दिन चाहिये? इस का उत्तर केवल भागहार की रीति से $१ \div \frac{१}{६} = ६$ यह होगा । अर्थात् वे दोनों मनुष्य मिल के वह पूरा काम ६ दिन में बनावेंगे ।

(६) जो एक बरस में १०० रुपये का ४ रुपये ब्याज होता है तो ६००० रुपये का ब्याज एक बरस में कितना होगा?

यहां पहिले, केवल भागहार की रीति से सिद्ध होता है कि एक बरस में १ रुपया का ब्याज $४ \div १०० = \frac{१}{२५}$ होगा । तब १ रुपये का $\frac{१}{२५}$ इतना ब्याज तो ६००० रुपये का कितना होगा? इस का उत्तर केवल गुणन की रीति से $\frac{१}{२५} \times ६००० = २४०$ यह होगा । अर्थात् ६००० रुपये का १ बरस में २४० रुपये ब्याज होगा ।

(७) जो एक बरस में १०० रुपये को ५ रुपये ब्याज हो तो १२०० रुपये का चार बरस में ब्याज और मूलधन मिल के कितना होगा?

यहां १ बरस में १ रुपये का व्याज $५ \div १०० = \frac{१}{२०}$ है

तब $\frac{१}{२०} \times १२०० = ६०$ यह १२०० रुपये का १ बरस में व्याज है।

इस लिये $६० \times ४ = २४०$ यह ४ बरस का व्याज है और

$१२०० + २४० = १४४०$ यह चार बरस में मूलधन और व्याज मिल के है।

अथवा। जब कि १०० रुपये का $\frac{१}{२०}$ उतने रुपये का एक बरस में व्याज होता है तो $\frac{१}{२०} \times ४ = \frac{१}{५}$ अर्थात् १०० रुपये का $\frac{१}{५}$ उतने रुपये का ४ बरस में व्याज होगा इस लिये १२०० रुपये का भी $\frac{१}{५}$ अर्थात् $\frac{१२००}{५} = २४०$ यह १२०० रुपये का ४ बरस में व्याज होगा। और तब $१२०० + २४० = १४४०$ यह चार बरस में १२०० मूलधन और २४० व्याज मिल के है।

अथवा ४ बरस में मूल धन और व्याज मिल के धन $१२०० + \frac{१}{५}$ स्व यह स्वांशानुबन्ध का रूप है।

$\therefore १२०० + \frac{१}{५}$ स्व $= \frac{६२००}{५} = १४४०$ यह मूलधन और व्याज मिल के धन है।

और जो ऐसा प्रश्न हो कि १ बरस में १०० रुपये का अमुक रुपये व्याज यों सेकड़ा अमुक रुपये के भाव से किसी मूलधन का एक बरस में जो व्याज होगा वह मूलधन में मिलाने से जो रुपये होंगे उन का उसी भाव से दूसरे बरस में जो व्याज हो वह उस व्याज समेत मूलधन में जोड़ देओ और उस योग का तीसरे बरस में व्याज कर के फिर वह उसी योग में जोड़ देओ यों और जितने बरस होंगे उतनी बेर पूर्व २ योग में उत्तर २ व्याज जोड़ देओ तो अन्त में योगराशि क्या होगा? तो इस प्रकार के व्याज को चक्रवृद्धि कहते हैं। और स्वांशानुबन्ध को भागजाति का रूप देने का जो प्रकार (१३५) वे प्रक्रम में लिखा है उस से चक्रवृद्धिसमेत मूलधन का ज्ञान तुरंत हो सकता है।

जैसा। जो एक बरस में १०० रुपये का ५ रुपये व्याज हो तो १२०० रुपये का चार बरस में चक्रवृद्धि और मूलधन मिल के कितना धन होगा?

यहां १ बरस में १ रुपये का व्याज $५ \div १०० = \frac{१}{२०}$ है।

तब स्पष्ट है कि १२०० रुपये का चार बरस में चक्रवृद्धिसमेत मूलधन $१२०० + \frac{१}{२०}$ स्व $+ \frac{१}{२०}$ स्व $+ \frac{१}{२०}$ स्व $+ \frac{१}{२०}$ स्व, यह होगा।

इस लिये (१३५) प्रक्रम से

$$\text{चक्रवृद्धिसमेत मूलधन} = \frac{१२०० \times २१ \times २१ \times २१ \times २१}{२० \times २० \times २० \times २०}$$

$$= \frac{३ \times २१^{४}}{४००} = \frac{५८३४४३}{४००} = १४५८ \frac{२४३}{४००} ।$$

और $\therefore$ $१४५८ \frac{२४३}{४००} - १२०० = २५८ \frac{२४३}{४००}$ यह चार बरस में केवल चक्रवृद्धि है।

(८) एक कराहों में २० सेर दूध था। एक स्त्री ने उस में से १ सेर दूध निकाल लिया और शेष दूध में सेर भर जल डाल दिया। फिर दूसरी स्त्री ने उस जलमिश्र दूध में से सेर भर लेके सेर भर जल उस में डाल दिया। यों दस स्त्रियों ने इस प्रकार से दूध लिया और उस में पानी मिला दिया। तब अन्त में उस कराहो में जलमिश्र दूध में कितना दूध और कितना पानी होगा? सो कहो।

इस प्रश्न को सुनने से मन में आवेगा कि यह स्वांशापवाह का उदाहरण है। इस में जब कि एक सेर, समग्र २० सेर का $\frac{१}{२०}$ है।

$$\therefore\ २० - \frac{१}{२०}\text{स्व} - \frac{१}{२०}\text{स्व} - \frac{१}{२०}\text{स्व} - \frac{१}{२०}\text{स्व} - \frac{१}{२०}\text{स्व} - \frac{१}{२०}\text{स्व}$$

$- \frac{१}{२०}\text{स्व} - \frac{१}{२०}\text{स्व} - \frac{१}{२०}\text{स्व} - \frac{१}{२०}\text{स्व}$, इतना अन्त में जलमिश्र दूध में दूध होगा।

$$\therefore\ \frac{२० \times १९ \times १९ \times १९ \times १९ \times १९ \times १९ \times १९ \times १९ \times १९ \times १९}{२० \times २० \times २० \times २० \times २० \times २० \times २० \times २० \times २० \times २०}$$

$= \frac{१९^{१०}}{२०^{९}} = \frac{६१३१०६६२५७८०१}{५१२०००००००००} = ११ \frac{४९९०६६२५७८०१}{५१२०००००००००}$ इतने सेर अर्थात् १२ सेर के लगभग दूध उस कराहो में शेष बचेगा और इसी लिये उस में ८ सेर के लगभग पानी मिला होगा।

(९) जिस संख्या के $\frac{४}{९}$ उसी संख्या में जोड़ देओ तो योग १०४ होता है वह संख्या क्या है?

यहां अभीष्ट संख्या का अंश $\frac{४}{९}$ है। इस लिये (१६५) प्रक्रम से $\frac{४}{९+४}$ अर्थात् $\frac{४}{१३}$ ये नये अंश और छेद हैं। और दृश्य १०४ है।

इस लिये $१०४ - \frac{४}{१३}\text{स्व} = \frac{१०४ \times ९}{१३} = ७२$ यह अभीष्ट संख्या है।

(१०) वह संख्या क्या है कि उस के $\frac{२}{५}$ उस में जोड़ देने से जो योग होगा उस के $\frac{५}{११}$ उसी योग में घटा देओ तो शेष ४२ रहता है।

यहां पहिले योग का अंश $\frac{५}{११}$ इस लिये (१६५) प्रक्रम से $\frac{५}{११-५}$ अर्थात् $\frac{५}{६}$ ये नये अंश और छेद हैं और दृश्य ४२ है

$\therefore$ $४२ + \frac{५}{६}$ स्व $= \frac{४२ \times ११}{६} = ७७$ यह योग है

फिर अभीष्ट संख्या का अंश $\frac{२}{५}$ है और इस लिये $\frac{२}{५+२}$ अर्थात् $\frac{२}{७}$ ये नये अंश और छेद हैं और यहां ७७ यह योग दृश्य है।

$\therefore$ $७७ - \frac{२}{७}$ स्व $= \frac{७७ \times ५}{७} = ५५$ यह अभीष्ट संख्या है।

अथवा पहिले $\frac{२}{५}$ और $\frac{५}{११}$ इन अंशों से (१६५) प्रक्रम के अनुसार $\frac{२}{७}$ और $\frac{५}{६}$ ये नये अंश और छेद उत्पन्न कर के ४२ दृश्य में एक हि बार स्वांशानुबन्ध और स्वांशापवाह की क्रिया करने से

$४२ + \frac{५}{६}$ स्व $- \frac{२}{७}$ स्व $= \frac{४२ \times ११ \times ५}{६ \times ७} = ५५$ यह अभीष्ट संख्या है।

(११) वह संख्या क्या है कि जिस का $\frac{१}{२}$ उसी में घटा देने से जो शेष बचे उस के $\frac{२}{६}$ उसी शेष में घटा देओ जो बचे उस का $\frac{१}{४}$ फिर उसी में घटा देओ तब जो शेष रहेगा फिर उसी के $\frac{३}{५}$ उसी में घटा देओ तो अन्त में ६३ शेष रहता है?

यहां $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{६}$, $\frac{१}{४}$, और $\frac{३}{५}$ इन अंशों से (१६५) प्रक्रम के अनुसार $\frac{१}{१}$, $\frac{२}{७}$, $\frac{१}{३}$ और $\frac{३}{२}$ ये नये अंश और छेद उत्पन्न कर के ६३ दृश्य में एक हि बार स्वांशानुबन्ध की क्रिया करने से

$६३ + \frac{१}{१}$ स्व $+ \frac{२}{७}$ स्व $+ \frac{१}{३}$ स्व $+ \frac{३}{२}$ स्व

$= \frac{६३ \times २ \times ६ \times ४ \times ५}{१ \times ७ \times ३ \times २} = \frac{३ \times १ \times ६ \times ४ \times ५}{१ \times १ \times १ \times १} = ५४०$ यह अभीष्ट संख्या है।

(१२) वह संख्या क्या है कि जिस को ७ से गुण के फल में ८ जोड़ देओ फिर योग में उसी के $\frac{३}{१०}$ जोड़ के ६ घटा देओ और शेष में ११ का भाग देओ तो लब्धि ६३ आती है?

यहां $\times ७$, $+ ८$, $+ \frac{३}{१०}$ स्व, $- ६$, $\div ११$ और अन्त का फल ६३ है। अब प्रश्न में योग का अंश $\frac{३}{१०}$ धन है इस लिये (१६५) प्रक्रम से $\frac{३}{१०+३}$ अर्थात् $\frac{३}{१३}$ ये नये अंश और छेद हैं तब (१०३) प्रक्रम के अनुसार विलोमविधि से

$६३ \times ११ = ६९३$, $६९३ + ९ = ७०२$, $७०२ - \frac{३}{१३}$ स्व $= \frac{७०२ \times १०}{१३} = ५४०$,
$५४० - ८ = ५३२$ और $५३२ \div ७ = ७६$ यह अभीष्ट संख्या है ।

(१३) एक बरस में १०० रुपये का $४\frac{१}{२}$ साढ़े चार रुपये व्याज, इस नियम से १० बरस में व्याजसमेत मूलधन ५८०० रुपये हुआ । तब उस में मूलधन और व्याज अलग २ कहो ।

यहां १ बरस में १ रुपये का व्याज $४\frac{१}{२} \div १०० = \frac{९}{२००}$ है ।

$\therefore \frac{९}{२००} \times १० = \frac{९}{२०}$ यह १ रुपया का १० बरस में व्याज है ।

इस लिये जितना मूलधन होगा उस के $\frac{९}{२०}$ उस मूलधन का १० बरस में व्याज होगा ।

अब वह मूलधनसंख्या क्या है जिस के $\frac{९}{२०}$ उस में जोड़ देने से योग ५८०० होता है ? यह प्रश्न का अर्थ है तब (१६५) प्रक्रम से

$५८०० - \frac{९}{२९}$ स्व $= \frac{५८०० \times २०}{२९} = ४०००$ यह मूलधन है ।

और $\therefore ५८०० - ४००० = १८००$ यह १० बरस में व्याज है ।

(१४) एक बरस में १०० रुपये का ५ रुपये व्याज इस नियम से तीन बरस में कितने धन का चक्रवृद्धि समेत मूलधन ९२६१ रुपये होगा ?

यहां (१६५) प्रक्रम के अनुसार विलोमविधि से

$९२६१ - \frac{१}{२१}$ स्व $- \frac{१}{२१}$ स्व $- \frac{१}{२१}$ स्व

$= \frac{९२६१ \times २० \times २० \times २०}{२१ \times २१ \times २१} = ८०००$ यह धन है ।

$\therefore ८०००$ मूलधन है और $९२६१ - ८००० = १२६१$ इतना व्याज है ।

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१) ३ रुपये को ५० सेर धान्य मिलता है तो १०० रुपये को कितना मिलेगा ?

उत्तर, $१६६६\frac{२}{३}$ सेर ।

(२) ७ पैसे को ८० कागज मिलते हैं तो १४० पैसे को कितने कागज मिलेंगे ?

उत्तर, १६०० कागज ।

(३) किसी मनुष्य ने २ पैसे को ३ आंब इस भाव से ३०० आंब मोल लिये और फिर ४ पैसे को ५ आंब इस भाव से सब बेंच डाले तो उस को कितना लाभ या हानि हुई?

उत्तर, ४० पैसे लाभ हुआ ।

(४) ७ रुपये की ५० सेर चीनी मोल मिलती है तो १६२ रुपये की कितनी मिलेगी?

उत्तर, ११५७ $\frac{१}{७}$ सेर ।

(५) किसी मनुष्य ने १ पैसे के ३ फल इस भाव से ८४ फल मोल लिये और उतने हि फल १ पैसे के ४ इस भाव से और मोल लिये और फिर सब फल २ पैसे के ७ इस भाव से बेंच डाले । तब उस को कितना लाभ या हानि हुई?

उत्तर, १ पैसा घाटा हुआ ।

(६) कोइ काम ५ मनुष्य १२ दिन में बनाते हैं तो वही काम ३ मनुष्य कितने दिन में बनावेंगे?

उत्तर, २० दिन में ।

(७) अ मनुष्य एक काम २१ दिन में पूरा बना सकता है और वही काम क मनुष्य २८ दिन में पूरा कर सकता है । अब वही काम अ और क ये दोनों मिलके बनाने लगे । उस में ४ दिन दोनों ने मिल के कुछ काम किया फिर क कहीं चला गया तब शेष काम अकेले अ नें कितने दिन में पूरा किया?

उत्तर, १४ दिन में ।

(८) एक कुण्ड में पानी आने के ३ झरने हैं उन में पहिला झरना खोल देने से २ घड़ी में, दूसरा खोलने से ३ घड़ी में और तीसरा खोलने से ६ घड़ी में वह कुण्ड भर जाता है । अब जो तीनों झरने एक हि बार खोल दिये जावें तो वह कुण्ड कितने काल में भर जायगा?

उत्तर, १ घड़ी में ।

(९) अ, क और ग नाम के तीन मनुष्य हैं । उन में अ मनुष्य एक खेत ४ दिन में काट सकता है, क मनुष्य ५ दिन में और वे तीनों मनुष्य मिल के २ दिन में सब खेत काट सकते हैं । तो अकेला ग मनुष्य उस खेत को कितने दिन में काटेगा?

उत्तर, २० दिन में ।

(१०) एक कुण्ड में अ, क और ग ये तीन नल थे । उन में अ और क ये दो नल कुण्ड में पानी आने के लिये थे और ग नल पानी जाने के लिये था । और अ नल को खोल देने से वह कुण्ड ३ घड़ी में, और क को खोल देने से १२ घड़ी में

भर जाता था। परंतु ग नल को खोल देने से वह भरा हुआ कुण्ड ४ घड़ी में रीता हो जाता था। अब जो तीनों नल एक हि बार खोल दिये जाते तो वह कुण्ड कितने काल में पानी से भर जाता?

उत्तर, ६ घड़ी में।

(११) वह संख्या क्या है कि जिस में उसी के $\frac{२}{९}$ जोड़ देओ तो योग २२ हो?

उत्तर, १८।

(१२) जिस संख्या में उस के $\frac{३}{१३}$ घटा देओ तो शेष १०० बचता है वह संख्या क्या है?

उत्तर, १३०।

(१३) जिस संख्या में उसी का $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$, और $\frac{१}{६}$, घटा देओ तो शेष ६ रहता है वह संख्या क्या है?

उत्तर, १२०।

(१४) एक तलाव के बीच में एक खम्भा खड़ा था। उस का $\frac{१}{५}$ नीचे कीच में था, $\frac{१}{३}$ जल में था और जल के ऊपर १४ हाथ था। तो वह समय खम्भा कितने हाथ ऊंचा था सो कहो।

उत्तर, ३० हाथ।

(१५) जिस संख्या के वर्ग में उस वर्ग के $\frac{२}{५}$ और ६ जोड देने से जो योग हो उस के वर्गमूल में उसी मूल के $\frac{२}{३}$ घटा देओ तो शेष ६ रहता है तो बताओ वह संख्या क्या है?

उत्तर, १५।

(१६) एक बरस में १०० रुपये का ५ रुपये ब्याज इस भाव से १५३० रुपये का ब्याज १ बरस में कितना होगा?

उत्तर, ७६ $\frac{१}{२}$ रुपये।

(१७) जो एक बरस में १०० रुपये का ४ $\frac{१}{२}$ रुपये ब्याज है तो ७ $\frac{१}{२}$ बरस में २८७५ रुपये का ब्याज कितना होगा?

उत्तर, ९७० $\frac{५}{१६}$ रुपये।

(१८) एक बरस में सेकड़ा ४ $\frac{३}{४}$ पौने पांच रुपये के भाव से १३७८ रुपये का ४ बरस में ब्याज और मूलधन मिलके कितना होगा?

उत्तर, १६३६ $\frac{४१}{५०}$ रुपये।

(१९) एक बरस में सेकड़ा चार रुपये के भाव से जो ८ बरस में व्याज और मूलधन मिलके १७६८ रुपये हों तो इस में मूलधन क्या है?

उत्तर, १३०० रुपये ।

(२०) एक बरस में सेकड़ा $३\frac{१}{२}$ रुपये के भाव से $६\frac{३}{४}$ पै.ने सात बरस में जो व्याज और मूलधन मिलके १६७८ रुपये सब धन हो तो उस में मूल धन और व्याज अलग २ कहो ।

उत्तर, मूलधन १३०० और व्याज ३७८ रु. ।

(२१) सेकड़ा ६ रुपये के भाव से ७८१२५ रुपये का ७ बरस में चक्रवृद्धिसमेत मूलधन कितना होगा? और व्याज भी अलग कहो ।

उत्तर । चक्रवृद्धिसमेत मूलधन, $११७४७१\frac{११३९८३७}{१००००००}$

और केवल व्याज, $३९३४६\frac{११३९८३७}{१००००००}$, वा, $३९३४६\frac{१}{९}$ आसन्न ।

(२२) कोई मनुष्य आज से लेके चार बरस के अन्त में $१६०७०\frac{३}{१०}$ इतने रुपये किसी महाजन से पावेगा । जो वह मनुष्य एक बरस में सेकड़ा $४\frac{१}{२}$ रुपये इस नियम से चक्रवृद्धि के भाव से सब व्याज कटवा के शेष रुपये आज हि लेने चाहे तो आज वह मनुष्य उस महाजन से कितने रुपये पावे?

उत्तर, $१६०००\frac{३८२४०००}{१६०७०२९७६१}$ अर्थात् १६००० आसन्न ।

(२३) यह सिद्ध करो कि हर एक संख्या का $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ और $\frac{१}{६}$ इन का योग उसी संख्या के समान होता है ।

(२४) यह सिद्ध करो कि $\frac{३+४+९}{७+९+२०}$ इस का मान $\frac{३}{७}$ से बड़ा, $\frac{४}{९}$ के समान और $\frac{९}{२०}$ से छोटा होता है ।

(२५) $\dfrac{१३\frac{१}{६}+६\frac{३}{१०}+७\frac{१३}{१५}}{१७\frac{११}{१५}-१२\frac{२}{२१}+३\frac{१}{३५}}$ इस को सर्वार्णित करो ।

उत्तर, $२\frac{१}{२}$ ।

(२६) $\dfrac{४\frac{३}{४} \text{ के } २\frac{८}{९}}{५\frac{३}{७} \text{ के } ४\frac{१}{३}} - \dfrac{१\frac{२}{७} \text{ के } ४\frac{२}{५}}{४५\frac{१३}{२१} - १७\frac{१}{३}}$ इस का मान क्या है?

उत्तर, $\frac{२३}{६०}$ ।

(२७) $\left(१ - \frac{१}{३}\right) + \left(\frac{१}{५} - \frac{१}{७}\right) + \left(\frac{१}{९} - \frac{१}{१३}\right)$ इस को सर्वागीत करो ।

उत्तर, $\frac{३१०४}{४०९५}$ ।

(२८) $\dfrac{१९\frac{२}{७} - १६\frac{७}{८} \text{ के } \frac{७}{९}}{\left(१८ + \frac{५}{७} \text{ स्व}\right) - २८\frac{५}{१९}} \times \left(९\frac{२}{३} - ६\frac{१}{९} \text{ के } \frac{३}{११}\right)$ इस का मान क्या है?

उत्तर, १९ ।

(२९) $\dfrac{१०\frac{१}{३}}{४\frac{१}{५}} + \dfrac{४\frac{९}{१०}}{३\frac{८}{९}} + \dfrac{३६\frac{५}{९} \text{ के } \frac{३९}{४०}}{३९\frac{७}{८} \text{ के } \frac{४७}{५०}} \times २\frac{३}{१३} - ३\frac{१}{३}$ इस का मान क्या है?

उत्तर, $२\frac{१७६०९}{३४६५०}$, या, $२\frac{१}{५}$ आसन्न ।

(३०) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{१९^२}{(१९-१३)(१९-५)} - \frac{१३^२}{(१९-१३)(१३-५)} + \frac{५^२}{(१९-५)(१३-५)} = १,$$

$$\frac{१५^२ \times (८+३)}{(१५-८)(१५-३)} - \frac{८^२ \times (१५+३)}{(१५-८)(८-३)} + \frac{३^२ \times (१५+८)}{(१५-३)(८-३)} = 0$$

और $\dfrac{४३}{(४३-२९)(४३-१२)} - \dfrac{२९}{(४३-२९)(२९-१२)} + \dfrac{१२}{(४३-१२)(२९-१२} = 0$

(३१) एक पात्र १० सेर दूध से भरा हुआ था । उस में से एक मनुष्य ने १ सेर दूध लेके उस में १ सेर जल डाल दिया । फिर उसी मनुष्य ने उसी जलमिश्र दूध में से दो सेर वह लेके उस में दो सेर जल डाल दिया फिर तीसरी बार उस ने उस में से ३ सेर जलमिश्र दूध लेके उस में तीन सेर जल डाल दिया । तो अन्त में उस पात्र में कितना दूध और पानी रहा सो कहो ।

उत्तर, $५\frac{१}{२५}$ सेर दूध और $४\frac{२४}{२५}$ सेर पानी ।

अध्याय ४

दशमलवगणित।

इस में दशमलवव्युत्पादन, दशमलवों का संकलन, व्यवकलन गुणन, भागहार, घातक्रिया, मूलक्रिया और प्रकीर्णक इतने प्रकरण हैं।

१ दशमलवव्युत्पादन।

१६७। जिस भिन्न संख्या का छेद १० का कोइ घात अर्थात् १०, १००, १००० इत्यादि हो उस संख्या को दशमलव कहते हैं। और इस भिन्न संख्या को अंश के नीचे छेद लिख के नहीं द्योतित करते किंतु यहां छेद को दिखलाने के लिये छेद के घातमापक की जो संख्या हो अर्थात् छेद में १ के ऊपर जितने शून्य हों उतने अंश में एक स्थान से अर्थात् दहिनी ओर के पहिले अङ्क से अङ्कों को गिन के उस के आगे . ऐसा बिन्दु करते हैं। इस को दशमलवबिन्दु कहते हैं।

जैसा। $\frac{७}{१०}$, $\frac{२३}{१००}$, $\frac{५२७}{१००}$ और $\frac{५३४८}{१०}$ इन को क्रम से

.७, .२३, ५.२७ और ५३४.८ यों लिखते हैं और इन को दशमलव संख्या वा दशमलव कहते हैं।

और यहां यह भी जानना चाहिये कि जब दशमलव के अंश में स्थानों की संख्या छेद के घातमापक की संख्या से छोटी हो तब अंश के स्थानों की संख्या जितनी छोटी होगी उतने उस अंशसंख्या की बांई ओर शून्य लिख के अर्थात् इस प्रकार से अंश में स्थानों की संख्या को छेद के घातमापक की संख्या के समान कर के उस के आगे दशमलवबिन्दु लिखते हैं।

इस की युक्ति अति स्पष्ट है।

क्योंकि किसी अभिन्न संख्या की बांई ओर शून्य लिख देने से उस संख्या का मान बिगड़ता नहीं।

जैसा। $\frac{३}{१००}$, $\frac{५६}{१०००}$, $\frac{७}{१००००}$, और $\frac{६३}{१००००}$ इन को क्रम से

.०३, .०५६, .०००७ और .००६३ यों लिखते हैं।

अभ्यास के लिये उदाहरण ।

(१) $\frac{३}{१०}$, $\frac{९}{१०}$, $\frac{१७}{१००}$, $\frac{३८}{१००}$, $\frac{८३}{१०}$, $\frac{१०३}{१००}$, $\frac{५१२}{१०}$, $\frac{७२३}{१००}$, $\frac{९२८}{१०००}$, $\frac{२३०९}{१००}$, $\frac{३७२१}{१०००}$, $\frac{४०२८}{१०००}$, $\frac{५२०१}{१०}$, $\frac{७४३६}{१००००}$ और $\frac{१२६७८}{१०००}$ इन भिन्न संख्याओं को क्रम से दशमलव के रूप में लिखेा ।

उत्तर, .३, .९, .१७, .३८, ८.३, १.०३, ५१.२, ७.२३, .९२८, २३.०९, ३.७२१, ४.०२८, ५२०.१, .७४३६ और १२.६७८ ।

(२) $\frac{१}{१००}$, $\frac{३}{१००}$, $\frac{७}{१०००}$, $\frac{१४}{१०००}$, $\frac{२६}{१०००}$, $\frac{३३}{१००००}$, $\frac{५७}{१००००}$, $\frac{८३}{१०००}$, $\frac{१५७}{१००००}$, $\frac{३६६}{१००००}$, $\frac{५६१}{१०००००}$, $\frac{७७३}{१००००००}$, $\frac{१}{१००००००}$ और $\frac{३६२७}{१०००००}$ इन भिन्न संख्याओं को क्रम से दशमलव के रूप में लिखेा ।

उत्तर, .०१, .०३, .००७, .०१४, .०२६, .००३३, .००५७, .०८३, .०१५७, .०३६६, .००५६१, .०००७७३, .००००० १ और .०३६२७ ।

(३) $\frac{१३}{१०}$, $\frac{२७}{१००}$, $\frac{३३}{१००}$, $\frac{७८}{१०}$, $\frac{६६}{१०००}$, $\frac{१४७}{१०}$, $\frac{२६३}{१००}$, $\frac{३७४}{१०००}$, $\frac{६}{१००००}$, $\frac{५२१}{१००००}$, $\frac{७८६}{१००००}$, $\frac{१००३}{१०००}$, $\frac{२६३४}{१००००}$, $\frac{५४६३}{१००००}$, $\frac{७२८१}{१००}$ और $\frac{७७७१}{१०}$ इन भिन्न संख्याओं को क्रम से दशमलव के रूप में लिखेा ।

उत्तर, १.३, .२७, .३३, ७.८, .०६६, १४.७, २.६३, .३७४, .०००६, .०५२१, .०७८६, १.००३, .२६३४, .५४६३, ७२.८१ और ७७७.१ ।

१६८ । जो संख्या दशमलव के रूप में लिखी हो उस को भिन्न संख्या के साधारण रूप में भी तुरंत लिख सकते हैं । इस का प्रकार केवल ऊपर के प्रक्रम में जो दशमलव के लिखने का प्रकार दिखलाया है उस के उलटा है ।

जैसा । .३, .२६, .०१, और ४.५३ इन दशमलवों के साधारण भिन्न रूप क्रम से $\frac{३}{१०}$, $\frac{२६}{१००}$, $\frac{१}{१००}$ और $\frac{४५३}{१००}$ ये हैं ।

अब इस प्रकार से दशमलव को भिन्न संख्या का साधारण रूप देने से जो उस भिन्न संख्या के अंश और छेद में अपवर्तन का संभव हो तो

उन में अवश्य अपवर्तन देके उस भिन्न संख्या को लघुतम रूप देना चाहिये । इस का कारण (१०३) प्रक्रम में स्पष्ट है । और उस लघुतम रूप की भिन्न संख्या स्थूल हो तो अन्त में उस को भागानुबन्ध का रूप देओ । प्र॰ (१३३) ।

जैसा । $.४ = \frac{४}{१०} = \frac{२}{५}$, $.१८ = \frac{१८}{१००} = \frac{९}{५०}$, $.७५ = \frac{७५}{१००} = \frac{३}{४}$,

$३.२५ = \frac{३२५}{१००} = \frac{१३}{४} = ३\frac{१}{४}$ इत्यादि ।

अभ्यास के लिये उदाहरण ।

(१) .७, .१३, २.९, .४७, ८.९, २.८३, ३.६७, ५४.०३९, १.००००१ और ३५८१.००२१ इन दशमलवों को साधारण भिन्न संख्या का लघुतम रूप देओ ।

उत्तर, $\frac{७}{१०}$, $\frac{१३}{१००}$, $२\frac{९}{१०}$ $\frac{४७}{१००}$, $८\frac{९}{१०}$, $२\frac{८३}{१००}$, $३\frac{६७}{१००}$, $५४\frac{३९}{१०००}$,

$१\frac{१}{१०००००}$ और $३५८१\frac{२१}{१००००}$ ।

(२) .६, .१४, ३.५, .४५, .०६५, .२५, १.२८, .८७५, ३.८४, ६.९६८, .००३१२ और ७५.९६ इन दशमलवों को साधारण भिन्न संख्या का लघुतम रूप देओ ।

उत्तर, $\frac{३}{५}$, $\frac{७}{५०}$, $३\frac{१}{२}$, $\frac{९}{२०}$, $\frac{१३}{२००}$, $\frac{१}{४}$, $१\frac{७}{२५}$, $\frac{७}{८}$, $३\frac{२१}{२५}$, $६\frac{१२१}{१२५}$,

$\frac{३९}{१२५००}$ और $७५\frac{२४}{२५}$ ।

(३) .१९, .२४, .३९. .४३, .०६ .३७५, .३१२५, .००४, १.३३५, ३७.७५, ५.०३६, ७९.८१, ८.३४५ और .९३७५ इन दशमलवों को साधारण भिन्न संख्या का लघुतम रूप देओ ।

उत्तर, $\frac{१९}{१००}$, $\frac{६}{२५}$, $\frac{३९}{१००}$, $\frac{४३}{१००}$, $\frac{३}{५०}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{५}{१६}$, $\frac{१}{२५०}$, $१\frac{६७}{२००}$,

$३७\frac{३}{४}$, $५\frac{९}{२५०}$, $७९\frac{८१}{१००}$, $८\frac{६९}{२००}$ और $\frac{१५}{१६}$ ।

१६९ । सिद्धान्त १ । जिस दशमलव में छेद की संख्या से अंश की संख्या बड़ी हो उस के अंश में छेद का भाग देने से लब्धि की वही संख्या होती है जो दशमलव बिन्दु की बाईं ओर है और वही शेष रहता है जो उस बिन्दु की दहिनी ओर है ।

जैसा । $२३.५७ = \frac{२३५७}{१००} = २३\frac{५७}{१००}$ अर्थात् २३ लब्धि और ५७ शेष है ।

अनुमान । इस सिद्धान्त से यह स्पष्ट प्रकाशित होता है कि दशमलव में दशमलव बिन्दु की बांई ओर अभिन्न संख्या रहती है और दहिनी ओर भिन्न संख्या ।

१७० । सिद्धान्त २ । दशमलव में दशमलव बिन्दु की बांई ओर अर्थात् अभिन्न भाग में जैसा बांई ओर के पहिले अङ्क से ले के दहिनी ओर पूर्व २ अङ्क के गुणक का उत्तरोत्तर अङ्क का गुणक $\frac{१}{१०}$ अर्थात् दशमांश होता है इसी क्रम से आगे दशमलव बिन्दु की दहिनी ओर अर्थात् भिन्न भाग में भी होता है ।

जैसा । $४३७.२५६ = \frac{४३७२५६}{१०००}$

$$= \frac{४०००००}{१०००} + \frac{३००००}{१०००} + \frac{७०००}{१०००} + \frac{२००}{१०००} + \frac{५०}{१०००} + \frac{६}{१०००}$$

$$= ४०० + ३० + ७ + \frac{२}{१०} + \frac{५}{१००} + \frac{६}{१०००}$$

$$= ४ \times १०० + ३ \times १० + ७ \times १ + २ \times \frac{१}{१०} + ५ \times \frac{१}{१००} + ६ \times \frac{१}{१०००} ।$$

इस दृष्टान्त से इस सिद्धान्त की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

अनुमान १ । इसी लिये दशमलव में अभिन्न भाग में जैसी एकस्थान से बांई ओर उत्तरोत्तर स्थानों की दश, शत, सहस्र इत्यादि संज्ञा हैं इसी प्रकार से दहिनी ओर भिन्न भाग में उत्तरोत्तर स्थानों की दशांश, शतांश, सहस्रांश इत्यादि संज्ञा होवें ।

अनुमान २ । ऊपर के सिद्धान्त से स्पष्ट प्रकाशित है कि दशमलव में दशमलव बिन्दु की दहिनी ओर जो पहिले स्थान में अङ्क है वह अपने वास्तव मान को नहीं दिखलाता है किन्तु अपने वास्तव मान के $\frac{१}{१०}$ का द्योतक होता है । इसी भांति जो दूसरे, तीसरे, चौथे इत्यादि स्थान में अङ्क हो सो क्रम से अपने वास्तव मान का $\frac{१}{१००}$, $\frac{१}{१०००}$, $\frac{१}{१००००}$, इत्यादि अंश का द्योतक होता है । इस लिये भिन्न संख्या में जैसे एकस्थान

से बांई ओर अङ्कों के मान उत्तरोत्तर उन के वास्तव मान से बहुत बड़े होते हैं वैसे दशमलव में एकस्थान से दहिनी ओर भिन्न भाग में अङ्कों के मान उत्तरोत्तर उन के वास्तव मान से बहुत स्वल्प होते हैं। इस कारण से जिस दशमलव के भिन्न भाग में बहुत अङ्क हों उस में दशमलव बिन्दु की दहिनी ओर के जितने अङ्क अभीष्ट हों उतने थोड़े से अङ्क रख के और अङ्क छेंक दिये जावें तो भी उस दशमलव के वास्तव मान में बहुत बीच न होगा। और ऊपर के अङ्कों को छेंक देने से जो संख्या रहेगी वह उस दशमलव का एक आसन्न मान होगा।

जैसा। ३.१४१५९२६५ इस दशमलव में जो ऊपर के २६५ ये तीन अङ्क छेंक दिये जावें तो भी ३.१४१५९ यह वास्तव मान के बहुत आसन्न हि होगा। क्यों कि २६५ इस में जो २ है यह २ का $\frac{१}{१000000}$ है और ६ उस का $\frac{१}{१0000000}$ है और ५ तो उस का $\frac{१}{१00000000}$ है। यों २६५ इन अङ्कों के मान बहुत हि स्वल्प हैं इस लिये ३.१४१५९ यह ३.१४१५९२६५ इस के बहुत आसन्न है।

इसी प्रकार से ३.१४१५९२६५ इस में जो ऊपर ९२६५ ये चार अङ्क भी छोड़ दिये जावें तो भी ३.१४१५ यह ऊपर दिखलाई हुई युक्ति से ३.१४१५९२६५ इस के पास हि होगा। परंतु यहां यह अवश्य जानना चाहिये कि जहां छेंके हुए अङ्कों में बांई ओर का पहिला अङ्क ५ से लेके ९ तक कोइ हो तो ऊपर के अङ्कों को छेंक देने से जो संख्या बचेगी उस की दहिनी ओर के पहिले अङ्क में १ जोड़ देओ तो वह योगसंख्या वास्तव मान के अधिक आसन्न होगी। जैसा। ३.१४१५९२६५ इस में ९२६५ इन चार अङ्कों को छेंक देने में जब कि ९२६५ इस को बांई ओर का पहिला अङ्क ९ है इस लिये यहां ३.१४१५ इस बची हुई संख्या की अपेक्षा से ३.१४१६ यह संख्या ३.१४१५९२६५ इस के अधिक पास होगी। क्यों कि ३.१४१५९२६५ − ३.१४१५

$= \frac{३१४१५९२६५}{१00000000} - \frac{३१४१५0000}{१00000000} = \frac{९२६५}{१00000000}$ इस अन्तर की अपेक्षा से ३.१४१६

$- ३.१४१५९२६५ = \frac{३१४१६}{१0000} - \frac{३१४१५९२६५}{१00000000} = \frac{३१४१६0000}{१00000000} - \frac{३१४१५९२६५}{१00000000}$

$= \frac{७३५}{१00000000}$ यह अन्तर थोड़ा है।

इस लिये दशमलव के ऊपर के अङ्कों के छेंक देने में इस बात का स्मरण अवश्य रखना चाहिये।

१७१। सिद्धान्त ३। दशमलव में भिन्न भाग के ऊपर चाहो उतने शून्य देओ तो भी उस दशमलव का मान पलटता नहीं।

जैसा । .३, .३०, .३००, .३००० इत्यादि सब परस्पर समान हैं। क्यों कि इन सभों के साधारण भिन्नरूप, क्रम से $\frac{३}{१०}$, $\frac{३०}{१००}$, $\frac{३००}{१०००}$, $\frac{३०००}{१००००}$ इत्यादि हैं और ये सब हर एक $\frac{३}{१०}$ के समान हैं। यह अतिस्पष्ट है।

१७२ । जैसा साधारण भिन्न संख्या को दिखलाने के लिये अंश की संख्या के नीचे एक रेखा लिख के उस के नीचे छेद की संख्या को लिखते हैं। ऐसा दशमलव भिन्न संख्या के दिखलाने में गौरव नहीं है। उस के दिखलाने का प्रकार तो ठीक वैसा ही है जैसा कि अभिन्न संख्या के दिखलाने का प्रकार है। यह (१८०) वे प्रक्रम से और उस के अनुमान से स्पष्ट है। इसी कारण से दशमलवों के संकलन व्यवकलन इत्यादि सब परिकर्म ठीक उसी प्रकार से बनते हैं जिस प्रकार से अभिन्न संख्याओं के होते हैं। यह बड़ा लाघव है। इस लिये अब हम दशमलवों के संकलन, व्यवकलन इत्यादि परिकर्म लिखते हैं।

२ दशमलवों का संकलन ।

१७३ । जिन दशमलव संख्याओं का योग करना है उन को एक के नीचे एक ऐसे क्रम से लिखो कि उस २ स्थान के अङ्क के नीचे उसी २ स्थान का अङ्क आवे अर्थात् एक हि ऊर्ध्वाधर पंक्ति में सब संख्याओं के दशमलव बिन्दु आवें। तब जिस प्रकार से अभिन्न संख्याओं का संकलन करते हो प्र०(२७) उसी प्रकार से उन दशमलव संख्याओं का भी योग करो और दशमलव बिन्दुओं के नीचे योग में भी दशमलव बिन्दु करो।

उदा० । ३१५.०६८, १२.५४, ६८२३ और ६३.४२१६ इन दशमलव संख्याओं का योग करो।

न्यास

```
    ३१५.०६८
     १२.५४
   ६८२३
     ६३.४२१६
-------------
योग १०२४४.०५६६
```

(२८) वे प्रक्रम को देखने से इस संकलन के प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है। और यहां योग की प्रतीति भी ठीक उसी प्रकार से होती है जो पहिले (२६) वे प्रक्रम में लिखा है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) ३.१४१५, ५४.०६६, ७२६, .७६५, २६.०५७६ और १३५८.०४२ इन का येाग करेा ।

उत्तर, २१७४.१३२४ ।

(२) ३१५.६८३, ६.६८७४३, .०३७०६३८, ४८१२.१२४, ५६.५८४२, .०००६५ और १.०१०७६१ इन का इकट्ठा करेा ।

उत्तर, ५१६५.४८७१३४८ ।

(३) .०००००६, ३७६५, २७.३१६८, ४३६.७०३६९, १२.०१८८, ३२८.१४६७२५ और १८.३२४६ इन को जोड़ेा ।

उत्तर, ४६२०.५१६८४१ ।

(४) ७३६.००६८४, ८.६८६५, २७.१२६८, ४२१३.७, .५२८४३७ और ७१०.०००५ इन का येाग क्या है?

उत्तर, ५६६६.३५२०७७ ।

(५) ७६१६.३७२६४८, २६.०६४५३, ४२८, १०३.५०७, २६.२३४८६३ और .८१६६६६ इन का येाग क्या है?

उत्तर, ८५०७.०२६३७ ।

(६) ८३२१.०६८, ३.४५६७, ६०२.६६००१, ५४०००.०००२, २६.३८४ और २६७.०१६३७८ इन का येाग कहेा ।

उत्तर, ६३२२३.८८८२८६ ।

(७) ५.४३०६८६, ३४.५०४६१, .७६३४, ५०७.६२८, २६.४०७६, और १.६४२७८१ इन का येाग कहेा ।

उत्तर, ५७६.७०७६८ ।

(८) ७६१४, ६.७, .६२, ४७.२, .१६८, ३८४.०२, ६८.३६४५, और .७८३४६ इन का येाग क्या है?

उत्तर, ८४२२.२१५६६ ।

(९) २७१५, ३२.५७६, ४१८.२०७६, ३.०४२, .६६४८२, .०५७, ७०३७६.१ और ५२.१८२४ इन का येाग करेा ।

उत्तर, ७३६००.८५६८२ ।

(१०) ८३.७१६, ३६१.०६, ४०२.२८४२, २५३७.६३, २०३.००५२, और ३०८६१.७२८१ इन का येाग करेा ।

उत्तर, ३४५०६.४५६५ ।

(११) ५२३.६१२, ४०२८.००६७, १६२.१०४६२, १३८०६.००५२६१, २३.६२ और १.६८१३२७ इन का येाग क्या है?

उत्तर, १८५७५.६३२६३८ ।

(१२) ३२८.००७, .०१६८४, २७.३३३३, १.००००४४४, .६८७५४, ४२७६.१३७८२२५ और ७२४.५५४८ इन का येाग क्या है?

उत्तर, ५३६१.०४०४४६६ ।

योगचक्र ।

२५७१.७५७३४	३९३५.६८५१७	२६.४४०३	५००७.४९६१३
३९१.६८२६६	४६४२.२५३४७	२९३७	३५७०.४४२५१
५७४४.२४९१७	७६३ १९३३४	३१९८.९३२१३	१८३५.००४३
२८३३.६८९४७	२२००.२४६९६	५३७९.००६५१	११२८.४३६

इस चक्र में हर एक पंक्ति को चार२ संख्याओं का योग ११५४१.३७८९४ इतना होता है। फिर वह पंक्ति खड़ी, बेंड़ी वा कर्णाकार हो। और इस चक्र में हर एक वर्गाकार चार कोष्ठ की चार संख्याओं का योग भी उतना हि होता है। यों इस चक्र में संकलन के बहुत उदाहरण हैं।

३ दशमलवों का व्यवकलन ।

१७४। जिन दो दशमलव संख्याओं का अन्तर करना हो उन में बड़ी संख्या के नीचे छोटी संख्या को इस क्रम से लिखो कि वियोज्य के उस२ स्थान के अङ्क के नीचे वियोजक का उस२ स्थान का अङ्क रहे। अर्थात् वियोज्य और वियोजक में दशमलव बिन्दु ठीक एक के नीचे एक आवे। तब अभिन्न संख्याओं का जैसा अन्तर करते हो प्र. (३४) उसी प्रकार से यहां भी अन्तर करो। और वियोज्य और वियोजक में जहां दशमलव बिन्दु है उसी के नीचे अन्तर में भी दशमलव बिन्दु करो।

यहां वियोज्य और वियोजक में जो दशमलवस्थान अर्थात् भिन्न स्थान समान न हों तो जिस में थोड़े स्थान हैं उस के ऊपर दहिनी ओर उतने शून्य देओ वा समझो जिन से दोनों में दशमलवस्थान समान हों। क्यों कि दशमलव पर चाहो उतने शून्य देओ तो भी उस का मान पलटता नहीं प्र. (१७१) यों दोनों में समान दशमलव स्थान करने से वा समझने से सीखने हारों को अन्तर करने में कुछ व्यामोह नहीं होता।

उदा० (१) ५८.३२१४ और ९.८७६ इन का अन्तर करो।

न्यास।

वियोज्य	५८.३२१४
वियोजक	९.८७६०
अन्तर	४८.४४५४

उदा० (२) ५२३.९८ इस में ४०५.०२९ इस को घटा देओ ।

न्यास । वियोज्य ५२३.९८
वियोजक ४०५.०२९
अन्तर ११८.९५१

उदा० (३) ३४३ और .५४२ इन का अन्तर क्या है?

न्यास । वियोज्य ३४३
वियोजक .५४२
अन्तर ३४२.४५८

इस अन्तर करने के प्रकार की उपपत्ति (३५) वे प्रक्रम से स्पष्ट प्रकाशित होती है । और यहां भी अन्तर की प्रतीति करने का प्रकार ठीक वैसा हि जानो जैसा (३६) वे प्रक्रम में लिखा है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) २७.३२८ और १९.१३९ इन दो दशमलवों का और ३७२.४३ और १८.७९८ इन दोनों का अलग २ अन्तर कहो ।

उत्तर, ८.१८९ और ३५३.६३२ ।

(२) ७२९४.००३ इस में २८.२०९६ इस को और ५९.०१८ इस में ८.३९२८९ इस को घटा के अलग २ अन्तर कहो ।

उत्तर, ७२६५.७९३४ और ५०.६२५११ ।

(३) ४२९.६८४, १.२५७४९ इन का और ३४४७.६९६८७४, १००२.९१८९ इन का अन्तर क्या है?

उत्तर, ४२८.४२६५१ और २४४४.७७७९७४ ।

(४) ९८.६४९३०५ इस को ८३०.००३ इस में और २०९८४२८ इस को २३.८१६ इस में घटा देओ ।

उत्तर, ७३१.३५३६९५ और २१.७१७५७२ ।

(५) ५९७.२३४९२, ६९०८.५२९८ इन का और ३४२८०३.१, २९.२८७९४ इन का अन्तर करो ।

उत्तर, ६३११.२९४८८ और ३४२७७३.८१२०६ ।

(६) १०००० इस में .९५४२८ इस को घटा देओ और ४.३९५२८३ इस को २०९९३.४ इस में घटा देओ ।

उत्तर, ९९९९.०४५७२ और २०९८९.००४७१७ ।

(७) ३८२५४.७२९ इस में १९४८२.९३८४४ इस को और ७२८.३४००९२८ इस में ८९.९९९९१९९९ इस को घटा देओ ।

उत्तर, १८७७१.७९०५५६ और ६३८.३४०१७२८१ ।

४ दशमलवों का गुणन ।

१७५ । गुण्य और गुणक इन दोनों को अभिन्न संख्या मान के उन का गुणनफल सिद्ध करो और उन दोनों में जितने दशमलवस्थान होंगे

उन के योग के समान उस गुणनफल में दहिनी ओर पहिले अङ्क से स्थानों को गिन के उन के आगे दशमलवबिन्दु करो अर्थात् गुण्य और गुणक में जितने दशमलवस्थान होंगे उन के योग के समान गुणनफल के दशमलवस्थान करो जो गुणनफल में उतने स्थान न हों तो उस की बांई ओर शून्य लिख के उतनी स्थानों की संख्या पूरी करके उस के आगे दशमलव बिन्दु करो । वही अभीष्ट गुणनफल जानो ।

उदा० (१) ४.२३७ इस को .७९ इस से गुण के गुणनफल कहो ।

न्यास ।	गुण्य	४.२३७
	गुणक	.७९
		३८१३३
		२९६५९
	गुणनफल	३.३४७२३

यहां गुण्य में दशमलव स्थान तीन हैं और गुणक में दो हैं इस लिये ३ + २ अर्थात् ५ इतने गुणनफल में दहिनी ओर के पहिले अङ्क से स्थानों को गिन के उस के आगे दशमलव बिन्दु किया है। ऐसाहि सर्वत्र जानो ।

उदा० (२) .२५७१ इस को .३६४ इस से गुण देखो ।

न्यास ।	गुण्य	.२५७१
	गुणक	.३६४
		१०२८४
		१५४२६
		७७१३
	गुणनफल	.०९३५८४४

यहां गुण्य और गुणक के दशमलव स्थानों का योग ७ है और गुणनफल में उतने स्थान नहीं हैं इस लिये उस की बांई ओर एक शून्य लिख के ७ स्थान पूरे कर के उस के आगे दशमलव बिन्दु किया है ।

उदा० (३) .३७५ इस को .६४ इस से गुण के गुणनफल कहो ।

न्यास ।	गुण्य	.३७५
	गुणक	.६४
		१५००
		२२५०
	गुणनफल	.२४०००

यहां गुणनफल .२४००० यह सिद्ध हुआ । परंतु दशमलव के ऊपर जो शून्य हों उस का मान कुछ नहीं है इस लिये यहां गुणनफल .२४ यही है ।

इस गुणनप्रकार कि उपपत्ति ।

जब कि गुण्य $४.२३७ = \frac{४२३७}{१०००}$ और गुणक $.७९ = \frac{७९}{१००}$ ।

इस लिये $४.२३७ \times .७९ = \frac{४२३७}{१०००} \times \frac{७९}{१००} = \frac{४२३७ \times ७९}{१०^३ \times १०^२}$

परंतु (८८) वे प्रक्रम के (२) रे सिद्धान्त से $१०^३ \times १०^२ = १०^{३+२} = १०^५$

$\therefore$ गुणनफल $= \frac{४२३७ \times ७९}{१०^५} = \frac{३३४७२३}{१०००००} = ३.३४७२३$ ·

इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

१७९ । जो गुणक १० का कोई पूरा घात अर्थात् १०, १००, १००० इत्यादि हो तो गुणनफल जानने का एक लघु प्रकार यह है कि गुणक में १ के ऊपर जितने शून्य होंगे उतने स्थान तक गुण्य में दशमलव बिन्दु को और दहिनी ओर हटा के लिखो और जो गुण्य में दशमलव बिन्दु की दहिनी ओर उतने स्थान न हों तो उस के ऊपर शून्य लिख के उतने स्थान कर लेओ । यों करने से जो गुण्य का रूप होगा वही अभीष्ट गुणनफल है ।

जैसा । $५३.२७४ \times १०० = ५३२७.४$

$३४१.२७ \times १००० = ३४१२७०$

$.००६४ \times १०००० = ६४$

और $१.२ \times १००००० = १२०००० ।$

इस प्रकार की उपपत्ति ऊपर की युक्ति से स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

अभ्यास के लिये उदाहरण ।

(१) ७.४, ३.७ इन का, .८७, ४.५ इन का, .६३, .६४ इन का और ९९, ८.३ इन का अलग २ गुणनफल कहो ।

क्रम से उत्तर, २७.३८, ३.९१५, .४०३२ और ८२१.७ ।

(२) ६.५, .३२ इन का, ७.३, ४.८ इन का, ७३, .४८ इन का, .७३, .४८ इन का, .००७३, .०४८ इन का और ७३०, ४.८ इन का अलग २ गुणनफल कहो ।

क्रम से उत्तर, २.०८, ३५.०४, ३५.०४, .३५०४, .०००३५०४, और ३५०४ ।

(३) ४.३२, ३०.७ इन का, ६२.५, १२.८ इन का, ६.२५, १.२८ इन का ६२.५, १.२८ इन का, .६२५, .१२८ इन का और ३९.४८, .०७५ इन का अलग २ गुणनफल कहो ।

क्रम से उत्तर, १३२.६२४, ८००, ८, ८०, .०८ और २.९६१ ।

(४) ३९.६७ इस को ४३.८ इस से, .०७२९ इस को .००२८ इस से, ४७.३२९४ इस को .४३५ इस से और .३९२७ इस को .१५९८ इस से गुण के अलग २ गुणनफल कहो ।

क्रम से उत्तर, १७३७.५४६, .०००२०४१२, २०.५८८२८९ और .०६२७५३४६ ।

(५) .००६८ इस को .०००७ इस से, ३.०००८९ इस को २.००१३५ इस से और १३.४१६४ इस को .१४९०७२ इस से गुण के अलग २ गुणनफल कहो ।

क्रम से उत्तर, .०००००४७६, ६.००५८३१२०१५ और २.००००९५८०८ ।

(६) .०००३, .०००२ इन का, .००३७, ०२५ इन का .००४२७, .००३५ इन का और .०२५६, .००८७५ इन का अलग २ गुणनफल कहो ।

क्रम से उत्तर, .०००००००६, .००००९२५, .००००१४९४५ और .०००२२४ ।

(७) ४.५९१७, १००० इन का, ३२५.७८, १०००० इन का, ९२.४३८७, २००० इन का और ६५०००, .३२७५४ इन का अलग २ गुणनफल कहो ।

क्रम से उत्तर, ४५९१.७, ३२५७८००, १८४८७७.४ और २१२९०.१ ।

गुणनचक्र ।

५.०४	.००३८८९६२	२.२४
.१५६८	.३५२८	.७९३८
.०५५५६६	३२	.०२४६९६

इस चक्र में हर एक पंक्ति की तीन २ संख्याओं का गुणनफल .०४३९१२२५३९५२ इतना हि होता है । वह पंक्ति चाहो खड़ी वा बेंडो वा कर्णाकार हो । इस प्रकार से इस में आठ उदाहरण होते हैं ।

१७७ । जब कि दशमलवों के गुणन में गुण्य और गुणक में जितने दशमलवस्थान हों उन के योग के समान गुणनफल में दशमलवस्थान होते हैं इस लिये गुणनफल में दशमलवस्थान बहुत होते हैं । जैसा नीचे विस्तार से दिखलाये हुए उदाहरण में गुणनफल में दशमलवस्थान आठ हैं ।

गुण्य	६८.५१	९४३
गुणक	३२ ५	३७
	४७९	६३ ६०१
	२ ०५५	५८ २९
	३४ २५९	७१ ५
	१३७ ०३८	८६
	२०५५५८२	९
गुणनफल	२२२९.४१६	६९ ३९१

अब इस में जो कितने एक ऊपर के अङ्कों को छेंक देवें तो भी गुणनफल में बहुत बीच न होगा इस का कारण (१७०) प्रक्रम के (२)रे अनुमान में स्पष्ट दिखलाया है। इस लिये मानो कि इस उदाहरण में दशमलव के ऊपर के पांच अङ्कों को छेंक देना है और पहिले तीन दशमलव के स्थान रखने हैं। तब जो गुणन की समग्र क्रिया कर के गुणनफल के ऊपर के कुछ अङ्क छेंक देओ तो फल तो कुछ स्थूल होगा और क्रिया में भी कुछ लाघव नहीं है। इस लिये गुणक के हर एक अङ्क से गुण्य के उतने हि उतने अङ्कों को गुण देना चाहिये कि जिस से गुणनफल में जितने दशमलवस्थान रखने इष्ट हैं उतने हि हर एक खण्ड गुणनफल में होवें। तब स्पष्ट है कि उन सब खण्ड गुणनफलों को एक के नीचे एक लिख के सभों का योग करो तो वही गुणनफल होगा जिस में अभीष्ट दशमलवस्थान हैं। इन सब खण्ड गुणनफलों को दिखलाने के लिये ऊपर के उदाहरण में एक उर्ध्वाधर अर्थात् खड़ी रेखा खींची है। उस की बाईं ओर में वे सब हैं।

अब यह विचारना चाहिये कि ऊपर के ६८.५१९८३ इस गुण्य के कितने२ अङ्कों को ३२.५३७ इस गुणक के हर एक अङ्क से गुण देना चाहिये कि हर एक गुणनफल में दशमलवस्थान तीन हि आवें। तब स्पष्ट है कि गुणक के एकस्थान के अङ्क से अर्थात् यहां २ से गुण्य के केवल ६८.५१९ इतने हि खण्ड को गुण देना चाहिये तो गुणनफल में दशमलवस्थान तीन होंगे। इस लिये गुणक के २ इस एक स्थान के अङ्क को गुण्य के ९ इस दशमलव के तीसरे स्थान के अङ्क के नीचे लिखो। इसी युक्ति से गुणक के दशस्थान के अङ्क से अर्थात् यहां ३ से गुण्य के ६८.५१९८ इतने खण्ड को गुण देओ तो गुणनफल में दशमलवस्थान तीन होंगे। क्यों कि गुणक के ३ इस अङ्क का मान यहां ३० है। इस लिये ३ इस दशकस्थान के अङ्क को गुण्य के ८ इस अङ्क के नीचे अर्थात् गुणक के एकस्थान के अङ्क की दहिनी ओर लिखो। तब इसी युक्ति से सिद्ध होता है कि और भी जो गुणक में अभिन्न भाग में अङ्क होंगे उन को क्रम से गुण्य के नीचे उत्तरोत्तर दहिनी ओर लिखो। और भी गुणक के दशांशस्थान के अङ्क से अर्थात् गुणक के भिन्न भाग में बाईं ओर के पहिले हि ५ इस अङ्क से गुण्य के केवल

६८.५१ इतने हि खण्ड को गुण देओ तो गुणनफल में दशमलवस्थान तीन होंगे। क्यों कि गुणक के ५ इस अङ्क का मान यहां .५ है। इस लिये ५ इस दशांशस्थान के अङ्क को गुण्य के १ इस अङ्क के नीचे अर्थात् गुणक के एकस्थान के अङ्क की बांई ओर लिखेा। इसी भांति गुणक के शतांशस्थान के अङ्क से अर्थात् उस के भिन्न भाग में बांई ओर से दहिनी ओर के दूसरे ३ इस अङ्क से गुण्य के केवल ६८.५ इतने हि खण्ड को गुण देओ तो गुणनफल में दशमलवस्थान तीन होंगे। क्यों कि ३ इस अङ्क का मान यहां .०३ है। इस लिये ३ इस शतांशस्थान के अङ्क को गुण्य के ५ इस अङ्क के नीचे अर्थात् गुणक के दशांशस्थान के अङ्क की बांई ओर लिखेा। इसी युक्ति से सिद्ध होता है कि और भी गुणक के भिन्न भाग में जो अङ्क होंगे उन को गुण्य के नीचे क्रम से उत्तरोत्तर बांई ओर लिखेा।

इस प्रकार से गुणक के सब अङ्कों को गुण्य के नीचे लिख के उस हर एक अङ्क से उस के ऊपर के अङ्क तक गुण्य के बांई ओर के खण्ड को अलग २ गुण देओ। यों करने से सब खण्ड गुणनफल ऐसे हि होंगे कि जिन में हर एक में दशमलव स्थान तीन हों। परंतु गुणक के हर एक अङ्क से गुणने में गुण्य के दहिनी ओर के जो अङ्क छोड़ देते हो उन में बांई ओर के पहिले अङ्क को उस गुणक के अङ्क से गुण देने से जो फल होगा उस के दशक के अङ्क को उस खण्ड गुणनफल के ऊपर के अङ्क में अवश्य जोड़ देना चाहिये। क्यों कि वह दशक का अङ्क उस खण्ड गुणनफल ही का दशमलव के ३ रे स्थान का अवशेष है। उस में भी उस फल के एकस्थान का अङ्क ५ से लेके ९ तक कोई हो तो उस दशक के अङ्क में १ जोड़ के तब उस एकाधिक दशकाङ्क को खण्ड गुणनफल में जोड़ देना चाहिये। दशक में १ जोड़ देने का कारण (१६०) वे प्रक्रम के (२) रे अनुमान से स्पष्ट है। यों जो सब खण्ड गुणनफल सिद्ध होंगे उनका योग करो सो वही गुणनफल होगा जिस में दशमलव स्थान तीन हों।

गुण्य	६८.५१६४३
गुणक के अङ्क	७३५२३
खण्ड गुणनफल	२०५५५८३
	१३७०३६
	३४२६०
	२०५५
	४८०
गुणनफल	२२२६.४१७

जैसा । ऊपर के उदाहरण में जो गुण्य है उस के नीचे ऊपर दिखलाई हुई युक्ति के अनुसार गुणक के अङ्कों को रख के सब खण्ड गुणनफल आदि बना के पार्श्व भाग में लिख के दिखलाया है ।

इसी युक्ति के आश्रय से उत्तर प्रक्रम में दशमलव के गुणन का एक लघु प्रकार लिखते हैं ।

१७८ । दशमलवों के गुणन का एक लघु प्रकार, ऐसा कि गुणनफल में अभीष्ट दशमलवस्थान होवें ।

विधि । पहिले गुण्य को लिख के गुणनफल में जितने दशमलव स्थान अभीष्ट होंगे उतने गुण्य में दशमलव बिन्दु की दहिनी ओर स्थान गिन के अन्तिम स्थान के अङ्क के नीचे गुणक के एक स्थान का अङ्क लिखो । फिर उस की दहिनी ओर गुणक के दश आदि स्थानों के अङ्कों को उलटे क्रम से लिख के बांई ओर दशांश आदि स्थानों के अङ्कों को उलटे क्रम से लिख देओ । और उस के नीचे एक रेखा खींचो । तब

यों लिखे हुए गुणक के अङ्कों में जो दहिनी ओर सब के ऊपर अङ्क हो उस से गुणने का प्रारम्भ करो । सो इस प्रकार से कि उस अङ्क के ऊपर जो गुण्य का अङ्क हो उस की दहिनी ओर के पहिले अङ्क को गुणक के उस अङ्क से गुण देओ तो जो फल होगा उस के आसन्न दशकों की संख्या जानो सो यों जाननी चाहिये कि जो फल ० से लेके ४ तक हो तो दशक का अङ्क शून्य समझो । जो ५ से लेके १४ तक हो तो दशक का अङ्क १, जो १५ से लेके २४ तक हो तो दशक का अङ्क २, और इसी क्रम से आगे भी जानो । तब यों आसन्न दशक की संख्या लेके उस को केवल हाथ लगी समझो । फिर उस गुणक के अङ्क के ऊपर के गुण्य के अङ्क तक जो बांई ओर का गुण्य खण्ड होगा उस को उस गुणक के अङ्क से (४९) वे प्रक्रम के अनुसार गुण के फल में वह पूर्व की हाथ लगी संख्या जोड़ देओ । यह जोड़ पहिला खण्ड गुणनफल है ।

इस को उस रेखा के नीचे लिखो। इसी प्रकार से गुणक के दूसरे अङ्क से पहिले उस के हाथ लगने के अङ्क को जान के तब उस दूसरे अङ्क से उस के ऊपर के गुण्य के अङ्क तक गुण्यखण्ड को गुण के फल में उस हाथ लगे अङ्क को जोड़ देओ। यह दूसरा खण्ड गुणनफल है इस को पहिले खण्ड गुणनफल के नीचे इस क्रम से लिखो कि पहिले के दहिनी ओर के ऊपर के अङ्क के नीचे दूसरे का भी वैसाहि अङ्क आवे। तब गुणक के और अङ्कों से भी इसी प्रकार से खण्ड गुणनफल उत्पन्न करके उन को इन पूर्व खण्ड गुणनफलों के नीचे इसी क्रम से लिखो। उन सब खण्ड गुणनफलों का योग करो। और गुणनफल में जितने दशमलव-स्थान अभीष्ट हों उतने इस योग के ऊपर के अङ्क से बाईं ओर अङ्क गिन के उस के आगे दशमलवबिन्दु करो। इस दशमलवबिन्दु से चिह्नित किया हुआ योग अभीष्ट गुणनफल है।

उदा० (१) ४७.५२६६८ इस को ६.३४६२ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान ४ होवें।

न्यास। ४७.५२६६८
२६४३६
२८५१७६९
१४२५६०
१९०१२
४२७७
६५
३०१.७७७३ यह अभीष्ट गुणनफल है।

यहां यह भी जानना चाहिये कि इस स्थूल गुणनफल में दशमलव के ऊपर के अङ्क में कभी २ एक वा दो का अन्तर रहता है। इसलिये गुणनफल में जितने दशमलवस्थान अभीष्ट हों उन में १ जोड़ के उतने दशमलवस्थान अभीष्ट मान के जो गुणनफल सिद्ध करो तो पूर्वकल्पित अभीष्ट स्थान के अङ्कों में प्रायः कुछ अन्तर न होगा।

उदा० (२) ८.३८७४ इस को .००३२ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलव स्थान पांच होवें।

न्यास। ८.३८७४
२३
२५१६
१६८
.०२६८४ यही अभीष्ट गुणनफल है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) .७६४६ इस को .६२५३ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलव-स्थान चार होवें ।

उत्तर, .४६६६ ।

(२) ३.४६१७ इस को २.६३८ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलव-स्थान तीन होवें ।

उत्तर, १०.२५७ ।

(३) ४२.६५ इस को २८.२७ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलव-स्थान दो होवें ।

उत्तर, १२०५.७१ ।

(४) ८४.३०४६ इस को .५४७ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलव-स्थान दो होवें ।

उत्तर, ४६.११ ।

(५) २६४.५६८ इस को १८५.७२ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दश-मलवस्थान दो होवें ।

उत्तर, ५४७१२.७४ ।

(६) .५३२७१८६ इस को .४६६४५२४ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान ७ होवें ।

उत्तर, .२६४४६१६

(७) ५३.४३६७ इस को २३.०१२६ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान तीन होवें ।

उत्तर, १२२६.७८६ ।

(८) १३.५७४८३ इस को ८४.८२०७ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान चार होवें ।

उत्तर, ११५१.४२६६ ।

(९) ८५.१६४३ इस को ३२.५३७६४ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान तीन होवें ।

उत्तर, २७७२.०४७ ।

(१०) ४६.६६१ इस को ४०.२४६ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दश-मलवस्थान शून्य होवें अर्थात् न होवें ।

उत्तर, २००० ।

४ दशमलवों का भागहार ।

१७९ । भाज्य और भाजक इन दोनों को अभिन्न मान के उन से अभिन्न भागहार की रीति से लब्धि जानो । तब भाजक के दशमलव-

स्थानों से भाज्य के दशमलवस्थान जितने अधिक होंगे उतने लब्धि के दहिनी ओर के ऊपर के अङ्क से लेके बाईं ओर स्थान गिन के उस के आगे दशमलव बिन्दु करो । जो लब्धि में उतने स्थान न हों तो उस की बाईं ओर शून्य लिख के उतनी स्थानों की संख्या पूरी कर के उस के आगे दशमलवबिन्दु करो । वही अभीष्ट लब्धि है ।

परंतु जो भाजक के दशमलवस्थानों की संख्या से भाज्य के दशमलवस्थानों की संख्या छोटी हो तो वह जितनी छोटी होगी उतने शून्य लब्धि के ऊपर लिखो । और वह शून्य समेत अभिन्न लब्धि जानो । इस में दशमलवस्थान न होंगे ।

परंतु ये ऊपर के दोनों प्रकार तब जानो जब भाज्य में भाजक का भाग देने से शेष कुछ न रहे । और जो कुछ शेष बचे तब भाज्य के ऊपर तब तक शून्य देके उस में भाजक का भाग देओ जब तक शेष कुछ न रहे वा लब्धि में फिर २ वेही अङ्क आवें । तब ऊपर के प्रकार से लब्धि में दशमलवबिन्दु करो ।

उदा० (१) २१६.०७३०७६८ इस में ५४.२५७ इस का भाग देओ ।

न्यास । ५४.२५७) २१६.०७३०७६८ (३.९८२४ यह लब्धि है ।

५३ ३०२०

४४७०७७

१३०२१६

२१७०२८

००००००

उदा० (२) ३.२७३८३१ इस में ४९.८३ इस का भाग देओ ।

न्यास । ४९.८३) ३.२७३८३१ (.०६५७ यह लब्धि है ।

२८४०३

३४८८१

०००००

उदा० (३) १९९९४.१४ इस में .५७६२ इस का भाग देओ ।

न्यास । .५७६२) १९९९४.१४ (३४७

२७०८१

४०३३४

०००००

यहां भाजक के दशमलवस्थानों की संख्या से भाज्य के दशमलवस्थानों की संख्या २ से छोटी है । इस लिये ३४७ इस लब्धि के ऊपर दो शून्य लिखने से ३४७०० यह यहां वास्तव लब्धि है ।

उदा० (४) ८२.०४ इस में ८.७५ इस का भाग देओ।

न्यास। ८.७५) ८२.०४००० (९.३७६ यह लब्धि है।
३२९०
६६५०
५२५०
०००>

उदा० (५) ५९२.७ इस में १४.३ इस का भाग देओ।

न्यास। १४.३) ५९२.७ (४१.४४७५५२४ इत्यादि। यह लब्धि है।
२०७
६४०
६८०
१०८०
७९०
७५०
३५०
६४०
६८ इत्यादि।

यहां न्यास में भाज्य पर शून्य नहीं दिये हैं। केवल शेष पर शून्य दे के लब्धि के अङ्क जान लिये हैं तो भी भाज्य पर उतने शून्य हैं यों मन में समझ के उस के अनुसार लब्धि में दशमलव बिन्दु किया है। और इस उदाहरण में पहिले लब्धि का तीसरा अङ्क ४ आया है और शेष ६८ है। वहीं फिर लब्धि का नौवां अङ्क आया है और शेष भी ६८ हि रहा है। इस से स्पष्ट है कि इस के अनन्तर लब्धि में फिर २ वेही अङ्क आवेंगे जो पहिले आये हैं। इस लिये आगे भाग लेना समाप्त किया।

भागहार के प्रकार की उपपत्ति।

(१) पहिले जब भाजक के दशमलवस्थानों से भाज्य के दशमलवस्थान अधिक हैं।

जब कि पहिले उदाहरण में भाज्य $= २१९.०७३०७६८ = \frac{२१९०७३०७६८}{१००००००}$ और

भाजक $= ५४.२५७ = \frac{५४२५७}{१०००}$।

$$\therefore \frac{२१९०७३०७६८}{१००००००} \div \frac{५४२५७}{१०००} = \frac{२१९०७३०७६८}{१०^७} \div \frac{५४२५७}{१०^३}$$

$$= \frac{२१९०७३०७६८}{१०^७} \times \frac{१०^३}{५४२५७} = \frac{२१९०७३०७६८}{५४२५७} \times \frac{१०^३}{१०^७}$$

परंतु $\frac{२१६०७३०७६८}{५४२५७} = ३९८२४$ और (८८) वे प्रकम के दूसरे सिद्धान्त के अनुमान से $\frac{१०^३}{१०^७} = \frac{१}{१०^७ - १०^३} = \frac{१}{१०^{७-३}} = \frac{१}{१०^४} = \frac{१}{१००००}$ ।

$\therefore$ लब्धि $= \frac{३९८२४}{१००००} = ३.९८२४$ ।

इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

(२) जब भाजक के दशमलवस्थानों से भाज्य के दशमलवस्थान थोड़े हैं ।

जब कि (३) रे उदाहरण में भाज्य $= १९९९४.१४ = \frac{१९९९४१४}{१००} = \frac{१९९९४१४}{१०^२}$

और भाजक $= .५७६२ = \frac{५७६२}{१००००} = \frac{५७६२}{१०^४}$

इस लिये लब्धि $= \frac{१९९९४१४}{१०^२} \div \frac{५७६२}{१०^४}$

$$= \frac{१९९९४१४}{१०^२} \times \frac{१०^४}{५७६२}$$

$$= \frac{१९९९४१४}{५७६२} \times \frac{१०^४}{१०^२}$$

$$= ३४७ \times १०^{४-२} = ३४७ \times १०^२$$

$$= ३४७ \times १०० = ३४७०० ।$$

इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

(३) और जो लिखा है कि भाज्य में भाजक का भाग देने से जो कुछ शेष रहे तो भाज्य पर और शून्य देके फिर भाजक का भाग देओ इस की उपपत्ति (१७१) वें प्रकम से अतिस्पष्ट है ।

१८० । जो भाजक की संख्या अभिन्न हो ऐसी कि उस के ऊपर कुछ शून्य हों तो लब्धि जानने का एक लघु प्रकार ।

भाजक के ऊपर जितने शून्य हो उन को मिटा देओ और उतने स्थान में भाज्य के दशमलवबिन्दु को बांई ओर हटा के लिखो । तब वैसे भाज्य में उस शून्यरहित भाजक का भाग देओ । और इस नये भाज्य में जितने दशमलवस्थान हों उतने हि दशमलवस्थान लब्धि में लाओ ।

इस से स्पष्ट है कि जो भाजक १० का कोई घात अर्थात् १०, १००, १००० इत्यादि हो तो इस में १ के ऊपर जितने शून्य हों उतने स्थान में भाज्य के दशमलवबिन्दु को बांई ओर हटा के लिखो वही लब्धि होगी।

उदा०। २११९८.७८ इस में ३७००० इस का भाग देके लब्धि कहो।

यहां उक्त रीति से नये भाज्य और भाजक बना के न्यास करते हैं।

३७) २१.१९८७८ (.५७२९४ यह लब्धि है।
२६९
१०८
३४७
१४८
०००

इस प्रकार की उपपत्ति ऊपर के प्रक्रम में जो युक्ति लिखी है उस से अतिस्पष्ट है।

अभ्यास के लिये उदाहरण।

(१) १९.०१२५ इस में ३.७५ इस का, ४३.७७०७६ इस में ७८.३२ इस का और ४१३.४८४४२ इस में .४९८ इस का भाग देओ।

क्रम से उत्तर, ४.२७, .५४३ और ८३०.२९।

(२) .०८२८८६५८ इस में .२५१४ इस का भाग देओ।

उत्तर, .३२९७।

(३) .८१५३००२ इस में ८.२९४ इस का और .००६८२६७८५ इस में १.७२८३ इस का भाग देके लब्धि कहो।

उत्तर, .०९८३ और .००३९५।

(४) .००४८३ इस में .०००७ इस का और २.३२०५७१४ इस में .३९५८ इस का भाग देके लब्धि कहो।

उत्तर, ६.९ और ५.८६३।

(५) ३.७५७०४ इस में .००५६ इस का और .००००२२९३२ इस में .०२७३ इस का भाग देके लब्धि कहो।

उत्तर, ६७०.९ और .०००८४।

(६) .६ इस में ३ का, .०६ इस में भी ३ का और .०६ इस में .३ इस का भाग देके अलग २ लब्धि कहो।

उत्तर, .२, .०२ और .२।

(७) २५.७५८ इस में ३.२४ इस का और ५०.४५०४ इस में .७३५ इस का भाग देके अलग २ लब्धि कहो।

उत्तर, ७.९५ और ६८.६४।

(८) ३७१.१४६ इस में ४.७५ इस का और .६६१३६६ इस में ३.६६२ इस का भाग देओ ।

उत्तर, ७८.१३६ और .१७४५ ।

(९) ३३.६८८ इस में ९.३७६ इस का और ७०० इस में २.५६ इस का भाग देओ ।

उत्तर, ३.६२५ और २७३.४३७५ ।

(१०) ३.७७ इस में २.९ इस का, .३७७ इस में २९ का, .३७७ इस में .०२९ इस का, ३७.७ इस में .२९ इस का, .०३७७ इस में .२९ इस का, ३७.७ इस में .०२९ इस का, ३७७ इस में .००२९ इस का और ३७७० इस में .०००२९ इस का भाग देके अलग २ लब्धि कहो ।

क्रम से उत्तर, १.३, .०१३, १३, १३०, .१३, १३००, १३००००, १३००००० ।

(११) .०४६६६८७७६ इस में .४७९५ इस का और .७७८२९३७५ इस में ७९.८२५ इस का भाग देके लब्धि कहो ।

उत्तर, .०९७३२८ और .००९७५ ।

(१२) .०००००११७८७१६ इस में .०१२३४ इस का और ५४०९६.२९३१३५ इस में ८.३०२९ इस का भाग देओ ।

उत्तर, .०००७६५४ और ५९१३.१५ ।

(१३) .००२६३१७३ इस में .०५९१४ इस का और .००५२८ इस में .०७६८ इस का भाग देके लब्धि कहो ।

उत्तर, .०४४५ और .०६८७५ ।

(१४) १५.८०७९ इस में ६.८७३ इस का और .०१८१७ इस का अलग २ भाग देके लब्धि कहो ।

उत्तर, २.३ और ८७० ।

(१५) .०००८८२३६८६ इस में .०२५३७ इस का, .२१८३ इस का और १.५९१ इस का अलग २ भाग देके लब्धि कहो ।

उत्तर, .०३४७८, .००४०४२ और .०००५५४६ ।

(१६) .३८४ इस में ४.६८७५ इस का और .०१०२४ इस का अलग २ भाग देके लब्धि कहो ।

उत्तर, .०८१९२ और ३७.५ ।

(१७) .२१५४२४ इस में .०८१६ इस का, .००९३५ इस का, १.२७५ इस का, .४१२५ इस का और १.०८८ इस का अलग २ भाग देके लब्धि कहो ।

उत्तर, २.६४, २३.०४, .१६८९६, .५२२२४ और .१९८ ।

(१८) ६५३८.६८१४४ इस में ७२.१९ इस का और .००६५३८६८१४४ इस में .५३२८ इस का भाग देके लब्धि कहो ।

उत्तर, ९०.५७६ और .०१२२७२३ ।

(१९) ५४.३ इस में .७९ इस का, .०१५ इस में ३.७ इस का और ३.३ इस में १.९७ इस का तब तक भाग देओ जब तक लब्धि में दशमलवस्थान तीन आवें ।

उत्तर, ६८.७३४, .००४ और १.६७५ ।

(२०) .०९८५४ इस में .००५३ इस का, ७८२१.६१ इस में ३.९५ इस का श्रीर .००८५ इस में .०२९ इस का तब तक भाग देश्रो जब तक लब्धि में दशमलवस्थान चार होवें ।

उत्तर, १८.५९२४, १९८०.१५४४ श्रीर .०२९३ ।

(२१) २९५४.१८ इस में .०६७ इस का, १३.७१ इस में ५५९ इस का श्रीर २ में .८३ इस का तब तक भाग देश्रो जब तक लब्धि में दशमलवस्थान चार श्रावें ।

उत्तर, ४४०९२.२३८८, .०२४५ श्रीर २.४०९६ ।

(२२) ३ में २९ का, १८९२७.५८३ इस में .०३५४८ इस का श्रीर २५ में ३४७ का तब तक भाग देश्रो जब तक लब्धि में दशमलवस्थान पांच श्रावें ।

उत्तर, .१०३४४, ५३३४७१.८९९९६ श्रीर .०७२०४ ।

(२३) १९९६३५९८२.५ इस में ९८५४६२३७ इस का श्रीर ५८.६९ इस में ३९४.७ इस का तब तक भाग देश्रो जब तक लब्धि में दशमलवस्थान पांच श्रावें ।

उत्तर, २.०२५८१ श्रीर .१४८६९ ।

(२४) .०००४८१७ इस में .०३९१२ इस का श्रीर .००१२५ इस में .६९ इस का तब तक भाग देश्रो जब तक लब्धि में दशमलवस्थान छ श्रावें ।

उत्तर, .०१२३१३ श्रीर .००१८११ ।

(२५) .१ इस में २९ का श्रीर .०००१८५ इस में .०२७१ इस का तब तक भाग देश्रो जब तक लब्धि में दशमलवस्थान छ श्रावें ।

उत्तर, .००३४४८ श्रीर .००६८२६ ।

१८१ । दशमलवों के भागहार का एक लघु प्रकार ऐसा कि जिस से लब्धि में श्रभीष्ट दशमलवस्थान श्रावें ।

(१) पहिला प्रकार । जब भाज्य का मान भाजक के मान से बड़ा है ।

रीति । पहिले दशमलव के भागहार की सामान्य रीति से श्रनुमान कर के जानो कि लब्धि में श्रभिन्न स्थान कितने होंगे । तब उस स्थानों की संख्या को लब्धि में जितने दशमलवस्थान श्रभीष्ट हों उन की संख्या में जोड़ देश्रो । श्रीर उस योगसंख्या के समान, भाजक में बाईं श्रोर के पहिले श्रङ्क से दहिनी श्रोर स्थान गिन के वहां एक चिह्न करो । तब उस चिह्न की बाईं श्रोर के श्रङ्कों को भाजक मान के उस का भाज्य के श्रन्त्यभाज्य में भाग देके शेष जान लेश्रो । फिर उस कल्पित भाजक के ऊपर का श्रङ्क छोड़ के बचे हुए भाजक खण्ड का उस शेष में भाग देके शेष जानो । यों भाजक का एक२ श्रङ्क छोड़ के श्रन्त तक भाग देश्रो । तब लब्धिस्थान में जो श्रङ्क होंगे वही लब्धि होगी । उस में जितने दशमलवस्थान श्रभीष्ट हों उतने स्थान पर दशमलव-बिन्दु करो ।

यहां भी लब्धि के हर एक अङ्क से भाजक के खण्ड को गुणने में उस खण्ड के दहिनी ओर के छोड़े हुए अङ्क को पहिले गुण के फल के दशक का अङ्क उसी भांति लेओ जैसा (१७८) वे प्रक्रम में गुणन के प्रकार में लिखा है ।

उदा० । १२५४.४६४०३ इस में ४६.२०५१७५ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान चार होवें ।

उक्त प्रकार से भाजक में चिन्ह कर के न्यास

४६२०५१,७५) १२५४४६४,०३ (२७.१४९८ यह लब्धि है ।
३३०३६१
६९२५
२३०४
४५६
४०
३

(२) दूसरा प्रकार । जब भाज्य का मान भाजक के मान से छोटा है ।

रीति । यहां पहिले देखो कि भाज्य में दशमलवबिन्दु को दहिनी ओर कितने स्थान में हटा देने से लब्धि में अभिन्न स्थान एक आवे । तब उतने स्थान की संख्या में १ घटा के शेष को, लब्धि में जितने दशमलवस्थान अभीष्ट हों, उन की संख्या में घटा देओ । और जो शेष बचे उस के समान भाजक में बाईं ओर के पहिले अङ्क से दहिनी ओर स्थान गिन के वहां चिह्न करो । और सब क्रिया पहिले प्रकार के अनुसार करो ।

उदा० । ९१३.०८ इस में २१३७.२ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान तीन होवें ।

उक्त प्रकार से भाजक में चिह्न कर के न्यास ।

२१३,७२) ९१३,०८ (.४२७ यही अभीष्ट लब्धि है ।
५८
१५
०

इस भागहार के लघु प्रकार की उपपत्ति (१७८) वे प्रक्रम में लिखे हुए प्रकार के उलटी क्रिया से अतिस्पष्ट है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) ४२३.६२१७६८ इस में ५७.३४५ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान तीन होवें ।

उत्तर, ७.३६२ ।

(२) ६८४.०७२६३१७२४ इस में ३६६.१४८६ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान चार होवें ।

उत्तर, २.६६५८ ।

(३) ३२८७.४३६२२४ इस में ७.२६०१२७४ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान तीन आवें ।

उत्तर, ४५०.६४४ ।

(४) ७२.६१८६७५ इस में .२५१८८५४१३ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान दो होवें ।

उत्तर, २८८.२६ ।

(५) २६.१०७८३६७ इस में १.६०७५४६३ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान पांच होवें

उत्तर, १५.२५६२८ ।

(६) १८२७४.२६२३३६४८ इस में ६२५.४८३६ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान शून्य होवें अर्थात् दशमलवस्थान न होवें ।

उत्तर, २६ ।

(७) .२१०५२२३५१ इस में .१५४८३ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान दो होवें ।

उत्तर, १.३६ ।

(८) ६.६२०१६५२१८०२ इस में .०८३५४ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान चार होवें ।

उत्तर, ७६.२४५८ ।

६ दशमलवों की घातक्रिया ।

१८२ । जिस दशमलवसंख्या का जो घात करना हो उस संख्या को अभिन्न मूलसंख्या मान के उस का वह घात करो प्र॰ (८७) वा (९२) । फिर मूलसंख्या में जितने दशमलवस्थान हों उन की संख्या को घातमापक से गुण के गुणनफल के समान उस घात में दशमलवस्थान करो । अर्थात् मूलसंख्या में जितने दशमलवस्थान हों उन से दूने दशमलवस्थान उस के वर्ग में करो, तिगुने उस के घन में करो इत्यादि । वही अभीष्ट घात है ।

उदा० । ३.८७ इस दशमलवसंख्या का वर्ग और घन करो ।

यहां पहिले ३.८७ इस मूलसंख्या को ३८७ यों अभिन्न मान के

तब $(३८७)^२ = १४९७६९$ और $(३८७)^३ = ५७९६०६०३$ ये क्रम से वर्ग और घन सिद्ध किये । अब मूलसंख्या में दशमलवस्थान दो हैं इस लिये वर्ग में दशमलवस्थान २ × २ अर्थात् ४ होंगे और घन में दशमलवस्थान २ × ३ अर्थात् ६ होंगे ।

∴ १४.९७६९ यह ३.८७ इस का वर्ग है और

५७.९६०६०३ यह घन है ।

इस की उपपत्ति ।

जब कि $३.८७ = \frac{३८७}{१००} = \frac{३८७}{१०^२}$

$$\therefore \quad (३.८७)^२ = \frac{(३८७)^२}{(१०^२)^२} \qquad \text{प्र० (१४४)}$$

परंतु (८८) वे प्रक्रम के (३) रे सिद्धान्त के अनुसार

$$(१०^२)^२ = १०^{२ \times २} = १०^४,$$

$$\therefore \quad (३.८७)^२ = \frac{(३८७)^२}{१०^४} = \frac{१४९७६९}{१००००} = १४.९७६९ ।$$

$$\text{और} \quad (३.८७)^३ = \left(\frac{३८७}{१०^२}\right)^३ = \frac{(३८७)^३}{(१०^२)^३} \qquad \text{प्र० (१४४)}$$

$$\text{परंतु} \quad (१०^२)^३ = १०^{२ \times ३} = १०^६ \qquad \text{प्र० (८८) सि० (३)}$$

$$\therefore \quad (३.८७)^३ = \frac{(३८७)^३}{१०^६} = \frac{५७९६०६०३}{१००००००} = ५७.९६०६०३ ।$$

इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) १.५ इस का वर्ग, घन और चतुर्घात क्या होगा ?

उत्तर, वर्ग = २.२५, घन = ३.३७५, चतुर्घात = ५.०६२५ ।

(२) .३ इस का वर्ग, घन और चतुर्घात क्या होगा ?

उत्तर, वर्ग = .०९, घन = .०२७ और चतुर्घात = .००८१ ।

(३) .०१७ इस का वर्ग, घन और चतुर्घात क्या होगा ?

उत्तर, वर्ग = .०००२८९, घन = .०००००४९१३ और

चतुर्घात = .००००००८३५२१ ।

(४) २.१३ इस का वर्ग, घन और चतुर्घात क्या होता है ?

उत्तर, वर्ग = ४.५३६९, घन = ९.६६३५९७ और

चतुर्घात = २०.५८३४६१६१ ।

(५) ११.०९०५ इस का वर्ग और घन कहो ।

उत्तर, वर्ग = १२२.९९९१९०२५ और

घन = १३६४.१२२५१९४६७६२५ ।

(६) ९३.५८२ इस का वर्ग और घन कहो ।

उत्तर, वर्ग = ८७५७.५९०७२४ और

घन = ८१९५५२.८५५१३३३६८ ।

(७) १४.४२२५ इस का वर्ग और घन करो ।

उत्तर, वर्ग = २०८.००८५०६२५ और

घन = ३०००.००२६८१३९०६२५ ।

(८) ७.३५८४२१९६ इस का वर्ग और घन कहो ।

उत्तर, वर्ग = ५४.१४६३७३७४१४१०२४१६ और

घन = ३९८.४३१८६५५९३१६०४८३१५८३४५५३६ ।

१८३ । जब कि गुणनकर्म ही से घातक्रिया बनती है तब जो दशमलवसंख्या का कोई घात ऐसा इष्ट हो कि उस में अभीष्ट दशमलव-स्थान होवें तो उस घातक्रिया में जो गुणन करना पड़ता है सो (१७८) वे प्रक्रम में जो गुणन का प्रकार लिखा है उस से करो तो इष्ट घात लाघव से सिद्ध होगा ।

जैसा । ७.३५८४२१९६ इस का वर्ग और घन करना है ऐसा कि उस में दश-मलवस्थान ५ आवें ।

तब ७.३५८४२१९६ इस के वर्ग के लिये जो इस को इसी से गुणना है उस में गुणनफल में जितने दशमलवस्थान अभीष्ट हैं उन से दो अधिक अभीष्ट स्थान मान के (१७८) वे प्रक्रम के अनुसार गुणन के लिये न्यास ।

७.३५८४२१९६	फिर घन के लिये न्यास	५४.१४६३७३८
६९ १२४८५३७		६९ १२४८५३७
५१ ५०८९५३७		३७९ ०२४६१६६
२२०७५२६६		१६२४३९१२१
३६७९२११		२७००३१८७
५८८६७४		४३३१७१०
२९४३४		२१६५८५
१४७२		१०८२९
७४		५४१
६६		४८७
४		३२
५४.१४६३७३८		३९८.४३१८६५८

इस प्रकार से ये वर्ग और घन सिद्ध हुए इन में दशमलवस्थान पांच हि अभीष्ट हैं इस लिये ५४.१४६३७ यह अभीष्ट वर्ग और ३९८.४३१९६ यह अभीष्ट घन है । ऊपर के प्रक्रम में जो अभ्यास के लिये उदाहरण लिखे हैं उन में आठवें उदाहरण का उत्तर देखो ।

अब इसी प्रक्रम में दशमलवसंख्या का वर्ग करने का ऐसा एक लघु प्रकार दिखलाते हैं कि जिस से उस वर्ग में दशमलवस्थान अभीष्ट होवें ।

विधि । वर्ग में जितने दशमलवस्थान अभीष्ट हों उन में दो जोड़ के उतने अभीष्ट दशमलवस्थान मानो और मूलसंख्या में जितने अभिन्न स्थान हों उतनी संख्या को उस अभीष्ट दशमलवस्थान की संख्या में जोड़ के योग के तुल्य दशमलवस्थान उस मूलसंख्या में रख के और सब दशमलव के अङ्कों को छिन्न देओ । और मूलसंख्या में जो उस योग के तुल्य दशमलवस्थान न हों तो उस संख्या के ऊपर शून्य देके उस में उतनी स्थानसंख्या पूरी करो और वैसी संख्या को अभिन्न मूलसंख्या मान के लिखो और उस के नीचे एक रेखा खींचो ।

तब उस लिखी हुई मूलसंख्या के बाईं ओर अन्त का जो अङ्क होगा उस को दूना कर के उस दूने अङ्क से उस मूलसंख्या को गुण देओ सो इस प्रकार से कि पहिले उस दूने अङ्क से मूलसंख्या के दहिनी ओर के अङ्क को गुण देने से जो फल होगा उस को उस गुणनफल में मत लेओ किंतु (१०८) वे प्रक्रम में जैसा आसन्न दशकों की संख्या जानने का प्रकार दिखलाया है उस के अनुसार केवल उस फल के आसन्न दशक की संख्या को जान के उस को मात्र गुणनफल में ले लेओ । फिर और सब अङ्कों को उस दूने अङ्क से गुण देओ परंतु मूल संख्या के बाईं ओर के अन्त के अङ्क को मात्र उस दूने अङ्क से न गुणो । वहां केवल उसी अङ्क से गुण देओ । यों जो गुणनफल सिद्ध होगा उस को पहिली पंक्ति कहो । तब उस लिखी हुई मूलसंख्या के दहिनी और बाईं ओर का एक २ अङ्क छोड़ के जो संख्या शेष रहे उसी को फिर मूलसंख्या मानो इस में भी पहिले ऐसी क्रिया कर के दूसरी पंक्ति सिद्ध करो । इसी प्रकार से आगे तीसरी, चौथी इत्यादि पंक्ति उत्पन्न करके उन को उस खींची हुई रेखा के नीचे ऐसे क्रम से लिखो

कि सभों के एकस्थान के अङ्क एक के नीचे एक आवें । तब उन सब पंक्तिओं का योग करो और वर्ग में जितने दशमलवस्थान अभीष्ट माने हों उतने इस योग में दहिनी ओर के अन्त के अङ्क से केले बाईं ओर अङ्कस्थान गिन के उस के आगे दशलमलवबिन्दु करो सो हीं अभीष्ट वर्ग है ।

यहां वर्ग में पहिले जितने दशमलवस्थान अभीष्ट हों उन से दो अधिक अभीष्ट स्थान मान के वर्ग सिद्ध करने के लिये लिखा है इस का कारण यह है कि दो अधिक स्थान मानने से उस वर्ग में पूर्व कल्पित अभीष्ट दशमलवस्थान के अङ्कों में कुछ अन्तर नहीं होता ।

पहिले (६१) वे प्रक्रम में जो उपपत्ति लिखी है और (१७८) वे प्रक्रम में जो गुणन का प्रकार लिखा है इन दोनों के आश्रय से इस ऊपर के विधि की उपपत्ति स्पष्ट होगी ।

उदा० (१) ७.३५८४२१९६ इस का वर्ग ऐसा करो कि उस में दशमलवस्थान ५ होवें ।

ऊपर के विधि के अनुसार मूलसंख्या का वर्ग के लिये न्यास

```
७.३५८४२१९६
-----------
 ५४०१७६०७४
   १२५०५३१
     ३३८२१
       ७०७
         २
-----------
५४.१४६३७३५
```

वर्ग में दशमलवस्थान ५ अभीष्ट हैं इस लिये ५४.१४६३७ यह अभीष्ट वर्ग है यह बहुत लाघव से बनता है ।

उदा० (२) जिस वृत्त क्षेत्र में व्यास का मान १ है उस के परिधि का मान ३.१४१५९२६५३५८९७९३२३८४६ इत्यादि दशमलव है । इस परिधि के मान का वर्ग जानना है ऐसा कि उस में दशमलवस्थान १६ होवें ।

तब अभीष्ट दशमलवस्थान १८ मान के वर्ग के लिये न्यास ।

३.१४१५९२६५३५८९७९३२३८४

९.८४९५५५९२१५३८७५९४३०
१८३१८५३०७१७९५८६४८
१७२७४१२२८७१८३४५८
२१८५३०७११७९५८६
३४२६५३५८९७९३
८५७७६४६१६२
६६१४३५९
४२४३०७
२८५८
१२

९.८६९६:४४०१०८९३५८६१३

वर्ग में १८ अभीष्ट दशमलवस्थान हैं

इस लिये ९.८६९६०४४०१०८९३५८६ यह अभीष्ट वर्ग है ।

७ दशमलवों की मूलक्रिया ।

१८४ । मूलक्रिया में यहां केवल वर्गमूल जानने का प्रकार लिखते हैं । रीति । जिस दशमलव संख्या का वर्गमूल जानना हो उस में दशमलवस्थानों की संख्या अवश्य सम चाहिये । जो वह संख्या विषम हो तो उस के ऊपर एक शून्य देके वह सम करो । तब उस दशमलवसंख्या को अभिन्न मान के उस का वर्गमूल जानो । प्र० (९६) । तब उस दशमलव संख्या में जितने दशमलवस्थान होंगे उस के आधे दशमलवस्थान उस वर्गमूल में करो । वही अभीष्ट वर्गमूल होगा ।

उदा० (१) ४८१.८९०३०४ इस का वर्गमूल क्या है?

यहां उक्त संख्या में दशमलवस्थानों की संख्या सम है इस लिये इस को अभिन्न मान के वर्गमूल जानने के लिये न्यास ।

४८१८९०३०४ (२१९५२
४
४१) ०८१
४१
४२९) ४०८९
३८३१
४३८५) २२८०३
२१९२५
४३९०२) ८७८०४
८७८०४

यहां वर्ग में दशमलवस्थान ६ हैं इस लिये वर्गमूल में दशमलवस्थान ३ होंगे । ∴ २१.९५२ यह अभीष्ट वर्गमूल है ।

उदा० (२) १८.२२१७९९७ इस का वर्गमूल कहो ।

यहां उक्त संख्या में दशमलवस्थान विषम हैं इस लिये उस के ऊपर एक शून्य देके उस संख्या को अभिन्न मान के वर्गमूल जानने के लिये न्यास ।

```
            १८२२१७९९७० (४२६८७
            १६
      ८२) ·२२२
            १६४
     ८४६) ·५८१७
            ५०७६
    ८५२८) ·७४१९९
             ६८२२४
   ८५३६७) ·५९७५७०
             ५९७५६९
             ·····१ शेष ।
```

यहां वर्ग में ऊपर के शून्य के समेत दशमलवस्थान ८ हैं । इस लिये वर्गमूल में दशमलवस्थान ४ होंगे ।

∴ यहां ४.२६८७ यह वर्गमूल है ।

उदा० (३) .००००४४८९ इस का वर्गमूल क्या है?

यहां संख्या में दशमलवस्थानों की संख्या सम है । अब उक्त संख्या को अभिन्न मान के वर्गमूल के लिये न्यास ।

```
          ४४८९ (६७
          ३६
   १२७) ·८८९
          ८८९
          ···
```

यहां वर्ग में दशमलवस्थान ८ हैं तब वर्गमूल में ४ होंगे इस लिये .००६७ यह वर्गमूल है ।

इस की उपपत्ति ।

जब कि दशमलव संख्या के दशमलवस्थानों से उस संख्या के वर्ग में दशमलवस्थान दूने होते हैं तब वर्ग के दशमलवस्थानों की संख्या अवश्य सम होगी और उस की अपेक्षा से वर्गमूल में दशमलवस्थान आधे होंगे यह अतिस्पष्ट है ।

और यहां यह भी जानना चाहिये कि जब दशमलव संख्या के वर्ग में दशमलवस्थान सम होते हैं तब उस को अभिन्न संख्या मान के

वर्गमूल लेने के लिये जब उस के विषम स्थान के अङ्कों पर बिन्दु करोगे तब उस वर्ग संख्या में अभिन्न भाग के एकस्थान के अङ्क पर अवश्य हि बिन्दु होगा । इसलिये दशमलव संख्या का वर्गमूल जानने के लिये उस के ऊपर बिन्दु करने का यह भी एक प्रकार है कि उस संख्या के अभिन्न भाग के एकस्थान के अङ्क पर पहिले बिन्दु कर के फिर उस के बांए और दहिने भाग में एक २ अङ्क बीच में छोड़ के सब अङ्कों पर बिन्दु करो । यों करने से अभिन्न भाग में जितने ऊपर बिन्दु होंगे उतने हि वर्गमूल में अभिन्न स्थान होंगे और सब दशमलवस्थान होंगे । यह जान के वर्गमूल में दशमलवबिन्दु करो ।

१८५ । ऊपर की युक्ति से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि जिस दशमलवसंख्या का वर्गमूल जानना है उस के दशमलवबिन्दु की दहिनी ओर पहिले से दो २ अङ्कों का एक २ विषम भाग होगा । और जब कि दशमलवसंख्या के ऊपर चाहो उतने शून्य देओ तौभी उस का मान पलटता नहीं तब स्पष्ट है कि जो दशमलवसंख्या अवर्ग है अर्थात् जिस का वर्गमूल लेने से कुछ शेष बचता हो उस के उस वर्गमूल में उक्त विधि से दशमलवबिन्दु करके तब उस शेष के ऊपर दो शून्य लिख के मूल में और एक दशमलव का अङ्क लब्ध कर लेओ । और यों आगे भी हर एक शेष पर दो २ शून्य देके मूल में चाहो उतने और दशमलव के अङ्क लब्ध कर लेओ । और जब कि दशमलव के दहिनी ओर के उत्तरोत्तर अङ्कों का मान बहुत हि स्वल्प होता है इस लिये इस प्रकार से वर्गमूल में जितने दशमलवस्थान इष्ट हों उतने लेके क्रिया को समाप्त करो । इस क्रिया से अवर्ग दशमलव संख्या का और अभिन्न संख्या का भी चाहो उतना आसन्नमूल मिल सकता है ।

उदा० (१) ४२.३१ इस का आसन्न वर्गमूल क्या है ?

न्यास । ४२.३१ (६.५०४६१३७ इ० । यह वर्गमूल है ।

३६

१२५) ·६३१

६२५

१३००४) ··६००००

५२०१६

१३००८६) ·७९८४००

७८०५१६

१३००९२१) ·१७८८४००

१३००९२१

१३००९२२३) ·४८७४७९००

३९०२७६६९

१३००९२२६७) ·९७२०२३१००

९१०६४५८६९

·६१३७७२३१ इत्या० ।

अथवा यहां (७५) वे प्रक्रम की रीति से हर एक शेष जानेा तेा क्रिया में लाघव होगा ।

उदा० (२) १९ इस संख्या का आसन्न वर्गमूल क्या है ?

न्यास । १९ (४.३५८८९८९४ इ० । यह वर्गमूल है ।

८३) ·३००

८६५) ·५१००

८७०८) ·७७५००

८७१६८) ·७८३६००

८७१७६९) ·८६२५६००

८७१७७८८) ·७७९६७९००

८७१७७९६९) ·८२२५५९६००

८७१७७९७८४) ·३७९५७८७९००

·३०८६६८७६४ इत्यादि ।

१८६ । जब वर्गमूल में दशमलव के अङ्क बहुत अभीष्ट हों तब एक लाघव का प्रकार ।

जिस संख्या का वर्गमूल जानना हो उस का पहिले उक्त प्रकार से तब तक वर्गमूल लेओ जब तक उस में दशमलव के अङ्क अभीष्ट अङ्कों के आधे के तुल्य हों । फिर शेष में उस के भाजक का (१८१) वें प्रक्रम के अनुसार भाग देओ तो मूल के अवशिष्ट अङ्क लब्ध होंगे ।

उदा० (१) ४१ इस का आसन्न वर्गमूल ऐसा कहो कि जिसमें दशमलवस्थान १० होवें ।

इस में वर्गमूल में दशमलवस्थान १० अभीष्ट हैं इस लिये पहिले जिस में पांच दशमलवस्थान होवें ऐसा आसन्न वर्गमूल लेने के लिये न्यास ।

४१ (६.४०३१२
१२४) ५००
१२८०३) ४००००
१२८०६१) १५६१००
१२८०६२२) ३१०३६००
५४२६५६

यों मूल में पांच दशमलव के अङ्क लेने से जो ५४२६५६ यह शेष रहा इस में इस के १२८०६२४ इस भाजक का (१८१) वे प्रक्रम के अनुसार भाग देने के लिये न्यास ।

१२८०६२४) ५४२६५६ (४२३७४
३०४०६
४७६४
६५२
५६
५

ये लब्ध हुए अङ्क पूर्व मूल के ऊपर दहिनी ओर लिख देने से ६.४०३१२४२३७४ यह अभीष्ट वर्गमूल सिद्ध हुआ ।

अथवा अभीष्ट वर्गमूल के आधे पूर्व दशमलवाङ्क और अवशिष्ट दशमलवाङ्क ये दोनो एक हि न्यास में लिखते हैं । सो इस प्रकार से ।

न्यास । ४१ (६.४०३१२४२३७४
१२४)५००
१२८०३)४००००
१२८०६१)१५६१००
१२८०६२२)३१०३६००
१२८०६२४) ५४२६५६
३०४०६
४७६४
६५२
५६
५

इस प्रकार की उपपत्ति के लिये (१८४) वे प्रक्रम से ४१ के वर्गमूलमें दस भी दशमलवाङ्क लेके दिखलाते हैं ।

न्यास ।

```
        ४१(६ ४०३१२४२३७४
१२४)५००
१२८०३)४००००
१२८०६१)१५६१००
१२८०६२२)३१०३६००
१२८०६२४४)५४२६५६ | ००
१२८०६२४८२)३०४०६ | २४००
१२८०६२४८४३)४७६३ | ७४३६००
१२८०६२४८४६७)६५१ | ८६६०७१००
१२८०६२४८४७४४)५५ | ४३१६७८३१००
                  ४ | २०६६८४४१२४ इत्यादि ।
```

इस में ५४२६५६ इस भाज्य में १२८०६२४४ इस भाजक का (१८१) वें प्रक्रम के अनुसार भाग देने से जो शेष रहते हैं वे सब न्यास में जो खड़ी रेखा किई है उस के बांए भाग में स्पष्ट दिखाई देते हैं । इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

यहां यह भी जानना चाहिये कि जब वर्गमूल में अभीष्ट दशमलव के अङ्कों की संख्या विषम हो तो अभीष्ट अङ्कों के आधे के स्थान में उस विषम संख्या में एक जोड के उस योग का आधा लेना चाहिये ।

उदा० (२) २७३ इस का आसन्न वर्गमूल ऐसा कहो कि जिस में दशमलव-स्थान ६ होवें ।

इस में अभीष्ट स्थानों की संख्या विषम है इस लिये उस में १ जोड के योग के आधे को अर्थात् यहां ५ को अभीष्ट अङ्कों का आधा मान के मूल के लिये न्यास ।

```
        २७३ (१६.५२२७११६४१ यह अभीष्ट वर्गमूल है ।
२६ )१७३
३२५ )१७००
३३०२ ) ७५००
३३०४२ ) ८६६००
३३०४४७ )२३५१६००
३३०४५४१ ) ३८४७१००
३३०४५४२ )  ५४२५५६
            २१२१०५
             १३८३३
               ६१५
               २८५
```

उदा० (३) ४२.३१ इस का वर्गमूल ऐसा चाहिये कि जिस में दशमलव के अङ्क ७ आवें ।

न्यास । ४२.३१ (६.५०४६१३७

१२५) ६३१

१३००४) ६००००

१३००८६) ७६८४००

१३००९२) ११८८४

४८७५

६७२

यहां ६.५०४६१३७ यह वर्गमूल है । यह पहिले (१८४) वे प्रक्रम के पहिले उदाहरण में जो मूल विस्तार से निकाला है उस के समान है ।

उदा० (४) १९ इस का वर्गमूल ऐसा चाहिये कि जिस में दशमलव के अङ्क ८ होवें ।

न्यास । १९ (४.३५८८९८९४

८३) ३००

८६५) ५१००

८७०८) ७७५००

८७१६८) ७८३६००

८७१७६) ८६२५६

७७६८

८२४

४०

५

यहां ४.३५८८९८९४ यह वर्गमूल है । यह भी (१८४) वे प्रक्रम के दूसरे उदाहरण में जो मूल विस्तार से दिखलाया है उस के समान है ।

इस स्थूल प्रकार से वर्गमूल के ऊपर के अङ्क में कदाचित् कुछ अन्तर रहता है ।

१८७ । जो साधारण भिन्न संख्या अवर्ग होगी उस का भी इसी प्रकार से दशमलव में आसन्नमूल मिल सकता है । वह इस प्रकार से ।

जिस साधारण भिन्न संख्या का दशमलव में आसन्नमूल जानना हो उस को पहिले लघुतमरूप देके उस के अंश और छेद को ऐसी एक हि संख्या से गुण देओ कि जिस से छेद की संख्या पूरा वर्ग हो जावे । यों उस भिन्न संख्या का दूसरा रूप बना के उस के अंश का आसन्नमूल निकाल के उस में छेद के वर्गमूल का भाग देओ । जो लब्धि होगी वही अभीष्ट आसन्नमूल है ।

इस की उपपत्ति (१२३) और (१४३) वे प्रक्रम से अति स्पष्ट है।

पहिले (१४८) वे प्रक्रम में जो भास्कराचार्य का प्रकार लिखा है उस से यह प्रकार मिलता है।

उदा० (१) $\frac{५}{८}$ इस साधारण भिन्न संख्या का दशमलव में आसन्न वर्गमूल कहो ऐसा कि उस में दशमलव स्थान ८ होवें।

यहां छेद की संख्या को २ से गुण देने से वर्ग होता है। इस लिये

$$\frac{५}{८} = \frac{५ \times २}{८ \times २} = \frac{१०}{१६}।$$

अब १० इस अंश का आसन्नमूल लेने के लिये न्यास।

```
              १०̇  ( ३.१६२२७७६६ यह १० का आसन्नमूल है।
  ६१    ) १००
  ६२६   )  ३९००
  ६३२२  )   १४४००
  ६३२४२ )    १७५६००
  ६३२४४ )     ४९११६
               ४८४५
                ४१८
                 ३९
                  १
```

और १६ इस छेद का वर्गमूल ४ है

इस लिये ३.१६२२७७६६ ÷ ४ = .७९०५६९४२ यह $\frac{५}{८}$ इस भिन्न संख्या का आसन्न वर्गमूल है।

अथवा (१७९) वे प्रक्रम से वा वक्ष्यमाण (१८८) वे प्रक्रम से उद्दिष्ट अवर्ग भिन्न संख्या को दशमलव का रूप देओ तब उस का आसन्न वर्गमूल ले आओ सो भी वही होगा

जैसा। $\frac{५}{८}$ = .६२५ अब इस का वर्गमूल ऐसा निकालो कि जिस में दशमलव-स्थान ८ होवें तब

```
न्यास।          .६२५०̇ (.७९०५६९४२
        १४९)  १३५०
        १५८०५) ९००००
        १५८१०) १०९७५
                 १४८९
                   ८६
                    ३
                    ०
```

इस लिये $\frac{५}{८}$ इस भिन्न संख्या का वर्गमूल = .७९०५६९४२ यह है । यह ऊपर सिद्ध किये हुए मूल के समान हि है ।

उदा० (२) $\frac{२}{३}$ इस का दशमलव में आसन्न वर्गमूल कहो ऐसा कि जिस में दशमलवस्थान १० होवें

यहां छेद को उसी से गुणा देने से वर्ग होता है

$$\therefore \frac{२}{३} = \frac{२ \times ३}{३ \times ३} = \frac{६}{९}$$

अब ६ इस अंश का वर्गमूल लेने के लिये न्यास ।

```
                ६   (२.४४९४८९७४२८
        ४४) २००
        ४८४) २४००
        ४८८९) ४६४००
        ४८९८४) २३९९००
        ४८९८८८) ४३९६४००
        ४८९७८९६) ४७७२९६
                 ३६३८०
                  २०९८
                   १३९
                    ४१
                     ३
```

और ९ इस छेद का वर्गमूल ३ है

इस लिये २.४४९४८९७४२८ ÷ ३ = .८१६४९६५८०९ यह $\frac{२}{३}$ इस भिन्न संख्या का आसन्न वर्गमूल है ।

अथवा (१७९) वे प्रक्रम से

$\frac{२}{३}$ = .६६६६ . . . . . इस के वर्गमूल के लिये

```
न्यास ।          .६६६६ . . . . . . .  (.८१६४९६५८०९
        १६१)  २६६
        १६२६) १०५६५
        १६३२४)  ८१०६६
        १६३२८९) १५७७०६६
        १६३२९८)  १०७४६५
                   ९४८६
                   १३२१
                     १५
                      १
```

इस लिये $\frac{२}{३}$ इस भिन्न संख्या का वर्गमूल .८१६४९६५८०९ यह है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) १९२.३७६९, ५५.९५०४, १२२६४०.०४ और २३०४०९६०.०१ इन में हर एक संख्या का वर्गमूल कहो।

उत्तर, १३.८७, ७.४८, ३५०.२ और ४८००.१।

(२) .२४०४६२७३६९, ५४.२५६४८२८१ और .००२४५३२२०९ इन के वर्गमूल क्या हैं?

उत्तर, .४९०३७, ७.३६५९ और .०४९५३।

(३) ४.०१२००९, .००००१२८३०७२४ और .०००१५१२९ इन के वर्गमूल कहो।

उत्तर, २.००३, .००३५८२ और .०१२३।

(४) १.६९५२०४, १६९.५४६४४१ और .०९१२६४४१ इन के वर्गमूल क्या हैं?

उत्तर, १.३०२, १३.०२१ और .३०२१।

(५) ५२०३.५७२१९८९२४१ और ६९५५९८.९८१६८७९८९८२४ इन के वर्गमूल कहो।

उत्तर, ७२ १३५७९ और ८३४.०२५७६८।

(६) ३५.७, ४७.६, ८९.०३ और ५.८२९ इन के आसन्न वर्गमूल कहो ऐसे कि जिन में दशमलवस्थान चार २ होवें।

उत्तर, ५.९७४९, ६.८९९२, ९.४३५५ और २.४१४३।

(७) ७.९२७, ७९.२७, .५६ और ५.६ इन के आसन्न वर्गमूल कहो ऐसे कि जिन में दशमलवस्थान पांच २ होवें।

उत्तर, २.८१५४९, ८.९०३३७, .७४८३३ और २.३६६४३।

(८) ३.६५ ५७.४२३, ११५.८ और .०६९ इन के आसन्न वर्गमूल ऐसे कहो कि जिन में दशमलवस्थान आठ २ आवें।

उत्तर, १.९१०४९७३१, ७.५७७७९६५१, १०.७६१०४०८४ और .२६२६७८५१।

(९) १३, ६९, २४७ और ६७५ इन के आसन्न वर्गमूल ऐसे कहो कि जिन में दशमलवस्थान नौ २ आवें।

उत्तर, ३.६०५५५१२७५, ८.३०६६२३८६२, १५.७१६२३३६४५, और २५.९८०७६२११३।

(१०) $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{१७}{१९}$ और $\frac{२८}{३९}$ इन के आसन्न वर्गमूल ऐसे कहो कि जिन में दशमलवस्थान दस २ होवें।

उत्तर, .७०७१०६७८१४, .७७४५९६६६९२, .९३५४१४३४६६, .९४५९०५३०२९ और .८४७३१८५४५७।

(११) $\frac{३२४}{३२५}$, $\frac{५२८}{६५९}$, $\frac{७३४}{९०१}$ और $\frac{१०३२}{११८९}$ इन के आसन्न वर्गमूल ऐसे कहो कि जिन में दशमलवस्थान ग्यारह २ होवें।

उत्तर, .९९८४६०३५३२०, .८९५१०५५५८२७, .९०२५७९८५१५६ और .९३१६४१७०४६१।

८ प्रकीर्णक ।

१८८ । किसी साधारण भिन्न संख्या को दशमलव का रूप देने का प्रकार ।

जो उद्दिष्ट भिन्न संख्या के अंश और छेद परस्पर दृढ न हों तो पहिले उस भिन्न संख्या को लघुतमरूप देओ प्र॰ (१३०)। फिर (१८९) वे प्रक्रम के अनुसार उस के अंश में छेद का भाग देओ अर्थात् अंश के आगे दशमलव-बिन्दु कर के उस के ऊपर चाहो उतने शून्य देके वैसे ऊपर शून्य दिये हुए अंश में छेद का भाग देओ । जो लब्धि आवेगी वही दशमलवरूप होगा ।

उदा॰ (१) $\frac{2}{5}$ इस को दशमलव का रूप देओ ।

न्यास । ५) २.०
.४

$\therefore \frac{2}{5}$ = .४ यही अभीष्ट दशमलवरूप है ।

उदा॰ (२) $\frac{3}{8}$ इस को दशमलव का रूप देओ ।

न्यास । ८) ३.०००
.३७५

$\therefore \frac{3}{8}$ = .३७५ यह अभीष्ट दशमलवरूप है ।

उदा॰ (३) $\frac{2}{3}$ इस का दशमलवरूप क्या है?

न्यास । ३) २.०००००
.६६६६६ इत्यादि ।

$\therefore \frac{2}{3}$ = .६६६६६ इत्यादि । यही अभीष्ट दशमलवरूप है ।

उदा॰ (४) $\frac{8}{15}$ इस का दशमलवरूप क्या है?

न्यास । १५) ८.०००००
.५३३३३ इत्यादि ।

$\therefore \frac{8}{15}$ = .५३३३३ इत्यादि । यह अभीष्ट दशमलवरूप है ।

उदा॰ (५) $\frac{73}{91}$ इस का दशमलवरूप क्या है?

न्यास । ९१) ७३.००००००० (.८०२१९७८ इत्यादि ।
२००
१८०
८९०
७१०
७३०
८ इत्यादि ।

और यहां जब कि ९१ यह भाजक ७ और १३ का गुणनफल है तब (५६) वे प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त से स्पष्ट है कि पहिले ७३ में ७ का भाग देओ फिर लब्धि में १३ का भाग देओ तो भी लब्धि ठीक आवेगी।

जैसा। ७) ७३.०००००००
१३) १०.४२८५७१४ इत्या०
.८०२१९७८ इत्या० वही लब्धि है जो ऊपर दीर्घ भागहार से आई है।

उदा० (६) $\frac{१७}{८०}$ इस को दशमलव का रूप देओ।

यहां ८० = १०×८

अब पहिले $\frac{१७}{१०}$ = १.७, तब फिर ८) १.७०००
.२१२५

∴ $\frac{१७}{८०}$ = .२१२५ यह दशमलवरूप है।

उदा० (७) $\frac{१}{४}+\frac{१}{५}$ इस का दशमलव में मान क्या है?

यहां $\frac{१}{४}+\frac{१}{५}=\frac{९}{२०}$ और २० = १०×२

अब पहिले $\frac{९}{१०}$ = .९ फिर २) .९
.४५

∴ $\frac{१}{४}+\frac{१}{५}$ = .४५ यह दशमलव में मान है।

अथवा, पहिले ४) १.०० फिर ५) १.०
.२५ .२

∴ $\frac{१}{४}+\frac{१}{५}$ = .२५ + .२ = .४५ यह भी वही मान है।

उदा० (८) $\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}$ इस का मान दशमलव में क्या है।

यहां $\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}=\frac{१५}{१६}$

∴ १६) १५.००००
.९३७५ यह दशमलव में मान है।

अथवा, जब कि ४ = २×२, ८ = २×२×२ और १६ = २×२×२×२ इस लिये यहां इस नीचे लिखे हुए प्रकार से भी मान ले आते हैं।

२) १
२) .५
२) .२५
२) .१२५
.०६२५
.९३७५ यह भी वही मान है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{१५}{१६}$, $\frac{१३}{२०}$, $\frac{१७}{२५}$ और $\frac{३१}{४०}$

$\frac{२३}{३२}$, $\frac{४७}{६४}$, $\frac{७७}{८०}$, $\frac{८१}{१२८}$ और $\frac{७}{३२०}$

और $३\frac{५}{८}$, $७\frac{३}{६४}$, $१\frac{१३}{१२८}$, $१७\frac{८३०}{१०२४}$ और $४\frac{७०१९}{१५६२५}$ इन के अलग २ दशमलवरूप कहो ।

क्रम से उत्तर, .५, .७५. .८७५, .९३७५, .६५, .६८ और ७७५ ।

.७१८७५, .७३४३७५, .९६२५, .६४८ और .०२१८७५ और ३.६२५, ७.०४६८७५, १.१०१५६२५, १७.८१७३८८८१२५, और ४.४४९२२१६ ।

(२) $\frac{१}{३}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{५}{९}$, $\frac{११}{२१}$ और $\frac{१७}{१३}$

$\frac{१}{६}$, $\frac{७}{१५}$, $\frac{२३}{३५}$, $\frac{६०}{७७}$ और $\frac{९७}{१४३}$

और $\frac{१९}{३०}$, $\frac{७८}{१०५}$, $\frac{१३१}{३८५}$ और $\frac{९८४}{१००१}$

इन सभों के अलग २ दशमलवरूप कहो ।

क्रम से उत्तर, .३३३ इ०, .४२८५७१४२ इ०, .५५५ इत्यादि, .५२३८०९५२ इ०, और १.३०७६९३०७ इत्या० ।

.१६६६ इ०, .४६६६ इ०, .६५७१४२८५७ इ०, .७७९२२०७ इ० और .६७८३२१६७ इत्या० ।

.६३३३ इ०, .७४२८५७१४२ इ०, ३४०२५९७४ इ०, और .९८३०१६९ इत्या० ।

(३) $\frac{१}{२}+\frac{१}{५}$, $\frac{७}{८}+\frac{१३}{२५}+\frac{२९}{४०}$ और $\frac{१}{५}+\frac{१}{२५}+\frac{१}{१२५}+\frac{१}{६२५}$ इन के अलग २ दशमलवरूप क्या हैं?

उत्तर क्रम से, .७, .९१५ और .२४९६ ।

(४) $\frac{१}{४}+\frac{१}{४^{२}}+\frac{१}{४^{३}}+\frac{१}{४^{४}}$ और $\frac{१}{३}+\frac{१}{३\times ३^{३}}+\frac{१}{५\times ३^{५}}+\frac{१}{७\times ३^{७}}$ + इत्यादि । इन का अलग २ दशमलवरूप क्या है?

उत्तर, .३३२०३१२५ और .३४३५७३५७९ इ० ।

(५) $\frac{१}{१}+\frac{१}{१\times २}+\frac{१}{१\times २\times ३}$ + इत्यादि और

$\frac{१}{५}-\frac{१}{३\times ५^{३}}+\frac{१}{३\times ५^{५}}-\frac{१}{२३९}$ इन का अलग २ दशमलवरूप कहो ।

उत्तर, १.७१८२८१८ इ० और .१९३२२१२३४ इ० ।

१८९ । अनुमान । साधारण भिन्न संख्या को दशमलव का रूप देने के लिये ऊपर के प्रक्रम में लिखा है कि अंश की संख्या के ऊपर यथेष्ट शून्य देके उस में छेद का भाग देने से दशमलवरूप बनता है। परंतु इस में छेद की कितनी एक संख्या ऐसी होती हैं कि उन से वह शून्यों से बढ़ाई हुई अंश की संख्या निःशेष होती है (जैसी ऊपर के प्रक्रम में पहिले, दूसरे और छठये उदाहरण में हैं) और कितनी एक ऐसी होती हैं कि उन के अंश की संख्या के ऊपर चाहो उतने शून्य देओ तो भी वह उस छेद से वह अंश कभी निःशेष नहीं होता किंतु उस की लब्धि में अर्थात् दशमलवरूप में वेही अङ्क फिर २ आते हैं (जैसी ऊपर के प्रक्रम में तीसरे, चौथे और पांचवे उदाहरण में हैं) इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि कितनी एक भिन्न संख्याओं के दशमलवरूप सान्त होते हैं और कितनी एक भिन्न संख्याओं के दशमलवरूप सान्त नहीं होते अर्थात् उन में दशमलव के अङ्कों का कहीं अन्त कहिये समाप्ति नहीं होती।

इस लिये जिस दशमलव संख्या में दशमलव के अङ्क कहीं समाप्त नहीं होते किंतु उस में वे ही अङ्क फिर २ आते हैं उस को आवर्त दशमलव कहते हैं और इस से और प्रकार की दशमलव संख्या को सान्त दशमलव कहते हैं।

१९० । अब इस प्रक्रम में लघुतमरूप दिई हुई साधारण भिन्न संख्याओं में किस भिन्न संख्या का दशमलवरूप सान्त होगा और किस का आवर्त होगा इस का विचार करते हैं।

साधारण भिन्न संख्या को दशमलव का रूप देने के लिये जो उस के अंश पर यथेष्ट शून्य देते हैं उस से मानो वह अंश १० वा १०० वा १००० इत्यादि से अर्थात् १० के किसी पूरे घात से गुणा हुआ होता है। इस लिये जिस लघुतमरूप दिई हुई साधारण भिन्न संख्या का अंश और १० का कोई पूरा घात इन का गुणनफल उस छेद से निःशेष होगा उसी भिन्न संख्या का दशमलवरूप सान्त होगा यह स्पष्ट है। परंतु वह गुणनफल छेद से तभी निःशेष होगा जो वह १० का पूरा घात उस छेद से निःशेष होवे क्योंकि वे अंश और छेद परस्पर दृढ़ हैं (१०८ वां प्रक्रम देखो) और १० यह संख्या २ और ५ इन दो संख्याओं

को छोड़ और किसी संख्या से निःशेष नहीं होती इस लिये १० का कोइ पूरा घात २ वा ५ के किसी पूरे घात से वा उन दोनों के घातों के गुणनफल से निःशेष होगा और किसी संख्या से निःशेष न होगा। इस कारण से जिस लघुतमरूप दिई हुई साधारण भिन्न संख्या का छेद २ वा ५ का कोइ पूरा घात हो वा उन के घातों के गुणनफल के समान हो उसी भिन्न संख्या का दशमलवरूप सान्त होगा इस से और प्रकार की भिन्न संख्या का दशमलवरूप कभी सान्त न होगा किंतु आवर्त होगा।

इस का कारण यह है कि जब ऐसी संख्या के अंश पर चाहो उतने शून्य देके उस में छेद का भाग देओ तो भी वह कभी निःशेष न होगा तब ऐसे भागहार में जब से शेष पर एक २ शून्य देके भाग देओगे तब से अलग २ शेषों की संख्या एकोनच्छेद की संख्या से (अर्थात् छेद में १ घटा देने से जो संख्या बचेगी उस से) अधिक कभी नहीं हो सकती यह अतिस्पष्ट है। इस लिये इस प्रकार से भाग देते २ फिर कहीं वही शेष बचेगा जो एक बेर पहिले रहा है और उस शेष पर भी शून्य देके जो और आगे भागहार की क्रिया किई जावे तो लब्धि में वेही अङ्क आवेंगे जो पहिले एक बेर आये हैं। और इसी भांति आगे भी वेही अङ्क फिर २ आवेंगे। इस लिये ऐसी संख्या का दशमलवरूप आवर्त होगा। यह सिद्ध हुआ।

१६१। आवर्त दशमलव में जो संख्या वही फिर २ रहती है उस को उस का परिवर्ती भाग वा परिवर्ती कहते हैं।

जिस आवर्त दशमलव में दशमलव भाग के आदि से हि परिवर्ती रहता है उस को शुद्ध आवर्त कहते हैं।

जैसा .६६६ इत्या०, .५७५७५७ इत्या० ये शुद्ध आवर्त दशमलव हैं।

जिस आवर्त दशमलव में दशमलव भाग के आदि में कोइ और संख्या रहती हैं जिस को उस का अपरिवर्ती भाग कहते हैं और फिर उस के आगे परिवर्ती का आरम्भ होता है उस को मिश्र आवर्त दशमलव कहते हैं।

जैसा .७३३३ इत्या०, .२६४५४५४५ इत्या० ये मिश्र आवर्त दशमलव हैं।

आवर्त दशमलव को लाघव से दिखलाने के लिये उस के परिवर्ती भाग में जो अङ्क हों उन में पहिले और अन्त के अङ्क पर एक २ बिन्दु लिखते हैं । जो परिवर्ती में एक हि अङ्क हो तो उसी पर बिन्दु लिखते हैं । इस प्रकार से उस में परिवर्ती को एक हि बार लिखते हैं फिर २ नहीं लिखते ।

जैसा .६६६ इत्या० इस को लाघव के लिये $.\dot{६}$ यों लिखते हैं । इसी भांति .५७५७ इत्यादि को $.\dot{५}\dot{७}$ यों, .७३३३ इत्या० इस को $.७\dot{३}$ यों, .२६४५४५ इत्या० इस को $.२६\dot{४}\dot{५}$ यों, और .६७४२३४२३४२३ इत्या० इस को $.६७\dot{४}२\dot{३}$ यों लिखते हैं ।

१९२ । जो दशमलव संख्या आवर्त नहीं है उस को साधारण भिन्न संख्या का रूप देना बहुत सुगम है और यह (१६८) वे प्रक्रम में दिखलाया है । अब इस प्रक्रम में हम आवर्त दशमलव को साधारण भिन्न संख्या का रूप देने का प्रकार दिखलाते हैं ।

(१) प्रथम प्रकार । जब आवर्त दशमलव संख्या शुद्ध है तब आवर्त दशमलव में जो परिवर्ती की संख्या हो वही अभीष्ट साधारण भिन्न संख्या का अंश होगा और परिवर्ती संख्या में जितने अङ्कस्थान होंगे उतने स्थानों में ९ लिखने से जो संख्या बनेगी वही उस का छेद होगा । इस प्रकार से जो भिन्न संख्या बनेगी उस को हो सके तो लाघव के लिये (१३०) वे प्रक्रम से लघुतमरूप देओ ।

उदा० (१) $.\dot{६}$ और $.\dot{५}\dot{७}$ इन आवर्त दशमलवों को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ ।

यहां, $.\dot{६} = \frac{६}{९} = \frac{२}{३}$ ।

और $.\dot{५}\dot{७} = \frac{५७}{९९} = \frac{१९}{३३}$ ।

उदा० (२) $.\dot{३}०७६९\dot{२}$ इस को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ ।

यहां $.\dot{३}०७६९\dot{२} = \frac{३०७६९२}{९९९९९९}$ इस को (१३०) वे प्रक्रम के अनुसार लघुतमरूप देने से $= \frac{४}{१३}$ ।

इस प्रकार की उपपत्ति ।

जिस शुद्ध आवर्त दशमलव को साधारण भिन्न संख्या का रूप देना हो उस के परिवर्ती में जितने अङ्कस्थान होंगे उतने शून्य १ पर देके उस से जो उस आवर्त को (१७६) वे प्रक्रम के अनुसार गुण देओ तो गुणनफल में परिवर्ती की संख्या के समान अभिन्न संख्या होगी और दशमलवस्थानों में अर्थात् भिन्न भाग में उसी आवर्त के

समान संख्या होगी । अब इस गुणनफल में जो उसी आवर्त को घटा देओ तो शेष में ठीक उस परिवर्ती की संख्या के समान अभिन्न संख्या रहेगी । परंतु १ पर जितने शून्य देके उस से आवर्त को गुण दिया है और उस में एक गुण आवर्त घटा दिया है उतने स्थानों में ९ लिखने से जो संख्या बनेगी उस से गुणी हुई आवर्त संख्या उस शेष में बचेगी । जैसा १० से गुणी हुई आवर्त संख्या में जो १ से गुणा हुआ आवर्त घटा देओ तो शेष में ९ से गुणा हुआ आवर्त बचेगा । जो १०० से गुणे हुए में १ गुणा घटा देओ तो शेष में ९९ से गुणा हुआ बचेगा । इसी भांति आगे भी । इसी प्रकार से यहां परिवर्ती में जितने अङ्कस्थान हों उतने शून्य १ पर देके उस से आवर्त को गुण दिया है इस लिये उतने स्थानों में ९ लिखने से जो संख्या बने उस से गुणे हुए आवर्त के समान शेष होगा । परंतु वह शेष परिवर्ती की संख्या के समान होता है । इस लिये परिवर्ती की संख्या में उस ९ से बनी हुई संख्या का भाग देने से जो लब्धि होगी वही आवर्त का मान होगा । यह सिद्ध हुआ ।

जैसा । $.\dot{६}$ अर्थात् .६६६ इत्या० यह शुद्ध आवर्त है । इस के परिवर्ती में अङ्क-स्थान एक हि है इस लिये इस को १० से गुण देओ तो (१७८) वे प्रक्रम से गुणनफल ६.६६६ इत्या० होगा । अब इस में जो एकगुण आवर्त घटा देओ तो स्पष्ट है कि शेष उसी आवर्त से ९ गुण रहेगा ।

अर्थात् ६.६६६ इ० — .६६६ इ० = ६ यह शेष उस आवर्त से ९ गुण है इस लिये $.\dot{६} = \frac{६}{९} = \frac{२}{३}$ यह साधारण भिन्न संख्या है ।

इसी भांति $.\dot{३}०७६९\dot{२}$ अर्थात् .३०७६९२३०७६९२ इत्या० यह एक शुद्ध आवर्त दशमलव संख्या है । इस में परिवर्ती के अङ्कस्थान ६ हैं इस लिये इस को १०००००० इस से गुण के उस गुणनफल में अर्थात् ३०७६९२.३०७६९२३०७६९२ इत्यादि इस में .३०७६९२३०७६९२ इत्या० इस को घटा देने से शेष ३०७६९२ यह बचता है । यह आवर्त के मान से ९९९९९९ इतने गुण हैं यह स्पष्ट है इस लिये

$.\dot{३}०७६९\dot{२} = \frac{३०७६९२}{९९९९९९} = \frac{४}{१३}$ यह साधारण भिन्न संख्या है । इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

(२) दूसरा प्रकार । जब आवर्त दशमलव मिश्र है तब उस आवर्त में बांई ओर से लेके दहिनी ओर प्रथम परिवर्ती के अन्त तक जो संख्या होगी और जो अपरिवर्ती तक संख्या होगी इन दोनों को अभिन्न संख्या मान के पहिली में दूसरी को घटा देओ जो शेष बचे वह अभीष्ट साधारण भिन्न संख्या का अंश होगा और परिवर्ती में जितने अङ्क-स्थान हों उतने स्थानों में ९ लिख के अपरिवर्ती भाग में जितने अङ्क-स्थान होंगे उतने शून्य उन नवों पर देओ सो उस का छेद होगा ।

उदा० (१) .७३̇ और .२९४५̇ इन मिश्र आवर्तों को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ ।

यहां, $.७\dot{३} = \frac{७३ - ७}{९०} = \frac{६६}{९०} = \frac{११}{१५}$

और $.२\dot{९}४\dot{५} = \frac{२९४५ - २९}{९९००} = \frac{२९१६}{९९००} = \frac{८१}{२७५}$ ।

उदा० (२) .६७४२३̇ और .०५३̇०̇ इन मिश्र आवर्तों को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ ।

यहां, $.६७\dot{४}२\dot{३} = \frac{६७४२३ - ६७}{९९९००} = \frac{६७३५६}{९९९००} = \frac{१८०१}{२७७५}$

और $.०५\dot{३}\dot{०} = \frac{५३० - ५}{९९००} = \frac{५२५}{९९००} = \frac{७}{१३२}$ ।

इस दूसरे प्रकार की उपपत्ति ।

जिस मिश्र आवर्त दशमलव को साधारण भिन्न संख्या का रूप देना हो उस में दशमलवबिन्दु से लेके दाहिनी ओर प्रथम परिवर्ती के अन्त तक जितने अङ्कस्थान हों उतने शून्य १ पर देके उस से जो उस आवर्त को गुण देओ तो गुणनफल में अभिन्न संख्या वही होगी जो आवर्त में दाहिने क्रम से प्रथम परिवर्ती के अन्त तक संख्या है और उस के भिन्न भाग में परिवर्ती की उत्तरोत्तर आवृत्ति रहेगी । और आवर्त के अपरिवर्ती भाग में जितने अङ्कस्थान हों उतने शून्य १ पर देके जो उस से उस आवर्त को गुण देओ तो उस गुणनफल में अपरिवर्ती की संख्या के समान अभिन्न संख्या होगी और भिन्न भाग में वही संख्या होगी जो पहिले गुणनफल के भिन्न भाग में है । अब इन दोनों गुणनफलों का जो अन्तर करो तो स्पष्ट है कि आवर्त में दाहिने क्रम से प्रथम परिवर्ती के अन्त तक जो संख्या है और अपरिवर्ती की जो संख्या है इन दोनों को अभिन्न मान के जो इन का अन्तर करो सोई शेष में रहेगा और उस में भिन्न भाग कुछ न रहेगा । परंतु ऊपर के दोनों गुणनफलों के लिये जो आवर्त के दो गुणक कल्पना किये हैं उन का अन्तर और आवर्त इन दोनों के गुणनफल के समान हि यह शेष होगा । प्र. (४४) सि (२) अनु. । और उन दो गुणकों के अन्तर में स्पष्टहि है कि परिवर्ती के जितने अङ्कस्थान हों उतने स्थानों में ९ रहेंगे और अपरिवर्ती में जितने अङ्कस्थान हों उतने शून्य उन नवों पर रहेंगे । इस लिये इस गुणकों के अन्तर का जो उस शेष में भाग दिया जाये तो उद्दिष्ट मिश्र आवर्त का मान लब्ध होगा यह सिद्ध हुआ ।

जैसा । .७३̇ अर्थात् .७३३३ इत्या० यह मिश्र आवर्त है इस में दाहिने क्रम से प्रथम परिवर्ती के अन्त तक दो स्थान हैं इस लिये इस आवर्त को १०० से गुण देने से ७३.३३३ इत्या० यह प्रथम गुणनफल हुआ । और इस आवर्त में अपरिवर्ती का एक हि अङ्कस्थान है । इस लिये आवर्त को १० से गुण देने से ७.३३३ इत्या० यह दूसरा गुणनफल हुआ । इन दोनों गुणनफलों का अन्तर = ७३.३३३ इत्या० − ७.३३३ इ० = ७३ − ७ = ६६ यह है और दो गुणकों का अन्तर = १०० − १० = ९० है

$\therefore .७\dot{३} = \frac{६६}{९०} = \frac{११}{१५}$ यह आवर्त का मान है ।

इसी भांति .०५३̇०̇ अर्थात् .०५३०३० इत्यादि यह एक मिश्र आवर्त है। इस में प्रथम परिवर्त्ती के अन्त तक अङ्कस्थान ४ हैं और अपरिवर्त्ती के २ हैं। इस लिये दो गुणक क्रम से १०००० और १०० ये हैं और दोनों गुणनफल क्रम से ५३०.३०३० इत्या० और ५.३०३० इ० ये हैं। इन गुणनफलों का अन्तर ५३० − ५ = ५२५ यह है और गुणकों का अन्तर १०००० − १०० = ९९०० यह है।

$\therefore$.०५३̇०̇ $= \frac{५३० - ५}{९९००} = \frac{५२५}{९९००} = \frac{७}{१३२}$ यह .०५३̇०̇ इस मिश्र आवर्त का मान है।

इस से इस दूसरे प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

अभ्यास के लिये उदाहरण।

(१) .४̇, .३̇२̇ और .५̇४६̇ इन को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ।

उत्तर, $\frac{४}{९}$, $\frac{३२}{९९}$ और $\frac{१८२}{३३३}$।

(२) .३̇, .५̇४̇, .६̇७̇, .४̇८१̇ और .४̇८६̇ इन को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ।

उत्तर, $\frac{१}{३}$, $\frac{६}{११}$, $\frac{६७}{९९}$, $\frac{१३}{२७}$ और $\frac{१८}{३७}$।

(३) .१̇४८५̇, .१̇७०७३̇, .७̇१४२८५̇ और .०̇५४७९४५२̇ इन को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ।

उत्तर, $\frac{१५}{१०१}$, $\frac{७}{४१}$, $\frac{५}{७}$ और $\frac{४}{७३}$।

(४) .१६̇, .४८̇, .७०४̇५̇, .३२̇७̇ और .२२६̇ इन को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ।

उत्तर, $\frac{१}{६}$, $\frac{२२}{४५}$, $\frac{३१}{४४}$, $\frac{५४}{१६५}$ और $\frac{१७}{७५}$।

(५) .६४̇८१̇, .६९̇६२̇, .७१̇१३५̇ और .६४५२̇७०̇ इन को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ।

उत्तर, $\frac{३५}{५४}$, $\frac{९४}{१३५}$, $\frac{६५८}{९२५}$ और $\frac{१९१}{२९६}$।

(६) .९०̇७३१७̇, .०८६८̇९०२४̇३ और १.०४२६१३̇६̇ इन को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ।

उत्तर, $\frac{१८६}{२०५}$, $\frac{५७}{६५६}$ और $\frac{३६७}{३५२}$।

(७) .६६०७̇१४२८५̇, .८२२११̇५३८४६̇, १.२५१४̇२८५७̇ और १.५०६००९६१̇५३८४̇ इन को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ।

उत्तर, $\frac{३७}{५६}$, $\frac{१७१}{२०८}$, $\frac{२१९}{१७५}$ और $\frac{१२५३}{८३२}$।

१९३ । ऊपर के प्रक्रम से जब कि आवर्त दशमलवों के मान साधारण भिन्न संख्या में जान सकते हैं तब उन भिन्न संख्याओं के द्वारा उन आवर्तों के संकलन, व्यवकलन, गुणन इत्यादि सब परिकर्म बन सकते हैं ।

उदा० (१) $१.\dot{७}\dot{५}$, $.\dot{४}८\dot{१}$ और $.\dot{४}३१४\dot{६}$ इन आवर्तों का योग क्या है?

तब (१९१) वे प्रक्रम से

$$१.\dot{७}\dot{५} = १\frac{२५}{३३},\ .\dot{४}८\dot{१} = \frac{१३}{२७} \text{ और } .\dot{३}४१४\dot{६} = \frac{१४}{४१}$$

$$\therefore \text{ योग} = १\frac{२५}{३३} + \frac{१३}{२७} + \frac{१४}{४१} = २\frac{७०६९}{१२१७७} \qquad \text{प्र० (१४०)}$$

$$= २.५८०५२ \text{ इत्यादि ।}$$

उदा० (२) $३.५\dot{४}$ और $१.०७\dot{२}\dot{५}$ इन का अन्तर क्या है?

यहां, $३.५\dot{४} = ३\frac{४९}{९०}$ और $१.०७\dot{२}\dot{५} = १\frac{७१८}{९९००}$

$$\therefore \text{ अन्तर} = ३\frac{४९}{९०} - १\frac{७१८}{९९००} = २\frac{११६८}{२४७५} = २.४७\dot{१}\dot{९} \text{ ।}$$

उदा० (३) $७.१\dot{२}\dot{३}$ इस को $५.०१\dot{७}$ इस से गुणा देओ ।

यहां $७.१\dot{२}\dot{३} = \frac{३५२६}{४९५}$ और $५.०१\dot{७} = \frac{११२९}{२२५}$

$$\therefore \text{ गुणनफल} = \frac{३५२६}{४९५} \times \frac{११२९}{२२५} = \frac{३९८०८५४}{१११३७५} = ३५.७४२७९६६ \text{ इ०}$$

उदा० (४) $१५.७३\dot{६}$ इस में $५.४\dot{५}७\dot{६}$ इस का भाग देओ ।

यहां $१५.७३\dot{६} = \frac{४७२१}{३००}$ और $५.४\dot{५}७\dot{६} = \frac{३०२९}{५५५}$

$$\therefore \text{ लब्धि} = \frac{४७२१}{३००} \div \frac{३०२९}{५५५} = \frac{४७२१}{३००} \times \frac{५५५}{३०२९}$$

$$= \frac{१७४६७७}{६०५८०} = २.८८३४१ \text{ इत्या० ।}$$

उदा० (५) $८.६\dot{७}$ इस का वर्ग करो ।

यहां $८.६\dot{७} = \frac{७८१}{९०}$

$$\therefore (८.६\dot{७})^२ = \left(\frac{७८१}{९०}\right)^२ = \frac{६०९९६१}{८१००} = ७५.३०३८२७ \text{ इत्या० ।}$$

१९४ । ऊपर के प्रक्रम में आवर्त दशमलवों के संकलन, व्यवकलन आदि जिस प्रकार से सिद्ध किये हैं उस में बहुत गौरव है । इस लिये ऊपर (१७०) वे प्रक्रम के (२) रे अनुमान में जो 'जिस दशमलव के भिन्न भाग में बहुत अङ्क हों उस में दशमलवबिन्दु की दहिनी

ओर के जितने अङ्क अभीष्ट हों उतने थोड़े से अङ्क रख के और अङ्क छोड़ दिये जावें तो भी उस दशमलव के वास्तव मान में बहुत बीच न होगा' इत्यादि लिखा है और सिद्ध भी किया है उस के अनुसार जिन आवर्त दशमलवों के संकलन आदि करने हों उन में उन के योग आदि फलों में जितने दशमलव स्थान अभीष्ट हों उन से दो २ और अधिक स्थान रख के संकलन आदि करो जैसा कि नीचे के उदाहरणों में दिखलाया है । तो क्रिया में बहुत लाघव होगा और फल भी उन के वास्तव मान के बहुत आसन्न होंगे ।

उदा (१) १.७५ .४८१ और .३४१४६ इन आवर्त दशमलवों का योग करो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान पांच होवें ।

यहां अभीष्ट स्थान ५ हैं इस लिये हर एक संख्या में ७ स्थान रख के योग के लिये न्यास ।

```
१.७५७५७५८
 .४८१४८१५
 .३४१४६३४
---------
२.५८०५२०७
```

इस लिये योग = २.५८०५२ यह पूर्व प्रक्रम में दिखलाये हुए योग के समान है ।

उदा० (२) ३.५४ और १.०७२५ इन का अन्तर करो ऐसा कि उस में दशमलव-स्थान ६ हों ।

यहां अभीष्ट स्थान ६ हैं इस लिये न्यास

```
३.५४४४४४४४
१.०७२५२५२५
----------
२.४७१९१९१९
```

इस लिये अन्तर = २.१७१९९९ यह उपर दिखलाये हुए अन्तर के समान है ।

उदा० (३) ७.१२३ और ५.०१७ इन का गुणनफल कहो ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान ५ आवें ।

यहां अभीष्ट स्थान ५ हैं इस लिये ७ अभीष्ट स्थान मान के (१७८) वें प्रक्रम के अनुसार गुणने के लिये न्यास ।

```
   ७.१२३२३२३२
   ७७१७१७१०५
  -----------
   ३५६१६१६१६
      ७१२३२३
      ४९८६२६
       ४९८६२
        ४९८६
         ४९८
          ५०
           ५
  -----------
  ३५.७४२७९६६
```

इस लिये गुणनफल = ३५.७४२७९ है। यह ऊपर के प्रक्रम में सिद्ध किये हुए गुणनफल के समान है अथवा यहां (१७०) वे प्रक्रम के (२) रे अनुमान के अनुसार गुणनफल ३५.७४२८ यह भी आसन्न होगा।

यहां यह भी जानना चाहिये कि आवर्त गुण्य गुणकों में जो दशमलव-स्थान अपरिच्छिन्न अर्थात् अपरिमित रहते हैं उन में, न्यास में, जितने गुणन-फल में स्थान अभीष्ट हों और जितने गुणक में अभिन्न स्थान हों उन के योग के समान दशमलवस्थान गुण्य में रखो और अभीष्ट स्थान और गुण्य के अभिन्न स्थान इन के योग के समान दशमलवस्थान गुणक में रखो। इस से न्यास में ऊपर गुण्य का एक अङ्क दाहिनी ओर बढ़ा रहेगा और नीचे उलटे लिखे हुए गुणक का एक अङ्क बाईं ओर अधिक रहेगा। जैसा ऊपर के न्यास में है।

उदा० (४) १५.७३६ इस में ५.४५७६ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान ४ आवें।

यहां अभीष्ट स्थान ४ हैं इस लिये ६ अभीष्ट स्थान मान के (१८१) वे प्रक्रम से लब्धि के लिये न्यास।

५.४५७६५७६) १५.७३६६६६ (२.८८३४१०
४८२१३५१
४५५२८५
१८६१३
२२४०
५७
२

इस लिये लब्धि = २.८८३४ यह पूर्व लब्धि के समान है।

उदा० (५) ८.९७ इस का वर्ग करो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ४ होवें।

यहां अभीष्ट स्थान ४ हैं इस लिये ६ अभीष्ट स्थान मान के (१७८) वें प्रक्रम से गुणन के लिये न्यास।

८.९७७७७७७
७७७७७९८
―――――――
६८४२२२२२
५२०६६६६
६०७४४४
६०७४४
६०७४
६०७
६०
६
―――――――
७५.३०३८२३

इस लिये अभीष्ट वर्ग = ७५.३०३८ यह पूर्व वर्ग के समान है ।

अथवा (१८३) वे प्रक्रम में जो वर्ग करने का विधि लिखा है उस के अनुसार वर्ग के लिये न्यास ।

```
  ८.६७७७७७७
  ----------
  ७४८४४४४३
    ४५३३३२
      ५९८८
        ५९
  ----------
  ७५.३०३८२२
```

वर्ग में दशमलवस्थान ४ अभीष्ट हैं इस लिये ७५.३०३८ यह अभीष्ट वर्ग ऊपर सिद्ध किये हुए वर्ग के समान है ।

अभ्यास के लिये उदाहरण ।

(१) ३.८̇१९̇, २.१२३̇, १.३०७ और .५०२̇४̇ इन का योग करो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ४ होवें ।

उत्तर, ७.१५२३ ।

(२) ५४.२१̇७̇, ३७५.४२̇, .०̇३२७̇ और १.१̇४९̇ इन का योग करो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ६ होवें

उत्तर, ४३०.८२१२४६ ।

(३) ४२.१७̇२̇ और ३४.८७̇ इन का, ९.०̇३९̇ और ५.४२̇६̇ इन का और ८.६८̇ और ८.७१४̇३̇ इन का अलग २ अन्तर करो ऐसा कि क्रम से पहिले अन्तर में दशमलवस्थान छ, दूसरे में चौदह और तीसरे में सात होवें ।

उत्तर, पहिला अन्तर = ७.२९३९३९ अर्थात् ७.२९̇३̇,

दूसरा = ३.६१२७७६४१२७७६४१ अर्थात् ३.६१̇२७७६४̇,

और तीसरा = .०२५४५४५ अर्थात् .०२५̇४̇ ।

(४) १३.२̇ इस को ७.०३̇ इस से गुणा देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान छ होवें ।

उत्तर, ९२.९९६२९६ अर्थात् ९२.९९̇६२̇ ।

(५) ७.०२̇३४̇ इस को .३२̇५̇ इस से गुणा देओ । गुणनफल में दशमलवस्थान पांच होवें ।

उत्तर, २.२८४३८ ।

(६) १७.२०९̇८̇ इस को ९.४८̇५७̇ इस से गुणा देओ । गुणनफल में दशमलवस्थान छ होवें ।

उत्तर, १६३.२४८७१५ ।

(७) .०३६४ इस को .००५̇८४̇ इस से गुणा देओ । गुणनफल में दशमलवस्थान पांच होवें ।

उत्तर, .०००२१ ।

(८) .६७६ इस से ३६५ इस को गुणा देओ। गुणनफल में दशमलवस्थान छ होवें।

उत्तर, २४८.१२६२६२ अर्थात् २४८.१२६।

(९) २३५.२४ इस में ८ का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान पांच होवें।

उत्तर, २९.४०५५५ इत्यादि अर्थात् २९.४०५।

(१०) ९.१३७४२१ इस में .१५ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान ६ आवें।

उत्तर, ६०.०३०६९८।

(११) ३०.७९३ इस में ८.८५४ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान ७ होवें।

उत्तर, ३.४७७७५४९।

(१२) ३२५.०९७ इस में ७.४ इस का, ७४.१२५ इस में ८.१३२ इस का, ७.५०४२ इस में .९०३२४ इस का और ५७६ इस में ३२.७४३ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धिओं में दशमलवस्थान ५ होवें।

उत्तर, क्रम से लब्धि ४३.६६९८८, ९.११५०१, ८.३०८०७ और १७.५९१३१।

(१३) ७२८.१३७५ इस में ३.०२४८९ इस का, २७.८४३ इस में .०३९५ इस का, .०२२८१७ इस में .०८४९३ इस का और ४.१३५७ इस में .०३९४ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धिओं में दशमलवस्थान ६ होवें।

उत्तर, क्रम से लब्धि २४०.७१५३५७, ७०३.१८६२२४, .०३३१७६ और १०४.८६२०३८।

(१४) ५४.३५८९७ इस का और ३५४.०३९७ इस का वर्ग कहो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ७ होवें।

उत्तर, क्रम से वर्ग २९५४.८९८५९५६ और १२५३३४.१७८६५३६।

(१५) ७०.३५४१२ इस का और .०८७५ इस का घन कहो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ५ आवें।

उत्तर, ३४८२३२.०२२९७ और .०००६७।

अब इस अध्याय के अन्त में कुछ प्रश्न लिख के इस को समाप्त करते हैं।

प्रश्न (१) शुद्ध दशमलव संख्या के ऊपर (दहिनी ओर) जो पांच शून्य देओ तो उस संख्या का मान क्या होगा और बांईं ओर जो उतने हि शून्य देओ तो उस का मान क्या होगा?

पहिला उत्तर, उस संख्या का मान पलटता नहीं। प्र॰ (१७१)

दूसरा उत्तर, उस दशमलव संख्या का मान अपने वास्तव मान का लक्षांश होगा।

प्र॰(२) २.३५ इस को और ५.७२५ इस को साधारण भिन्न संख्या के रूप में लिखो । और ३५ $\frac{१}{५}$ और ४० $\frac{२}{१५}$ इन दो संख्याओं का योग, अन्तर और गुणनफल दशमलव के रूप में कहो ।

उत्तर, २ $\frac{७}{२०}$ और ५ $\frac{२९}{४०}$

और योग = ७५.$\dot{३}$, अन्तर = ४.९$\dot{३}$ और गुणनफल = १४१२.६९$\dot{३}$ ।

(३) १ $\frac{१}{५}$, २ $\frac{१}{४}$, ३ $\frac{१}{३}$, ४ $\frac{१}{२}$ और ५ $\frac{१}{६}$ इन का योग दशमलवरूप में कहो ।

उत्तर, १६.४५ ।

(४) ३१५.७ और ३.१५७ इन दो संख्याओं का योग, अन्तर, गुणनफल और भजनफल कहो ।

क्रम से उत्तर, ३१८.८५७, ३१२.५४३, ९९६.६६४९ और १०० ।

(५) $\frac{.५ + .३}{.४ - .२}$, $\frac{७\frac{१}{२} - .७}{३\frac{१}{२} - .३}$ और $\frac{५३०.६७ - ४२०.५३}{१७\frac{८}{९}}$ इन को सर्वाणित कर के अलग २ दशमलवरूप में फल कहो ।

क्रम से उत्तर, ४, २.१२५ और ६.१५६८९४४१ आसन्न ।

(६) $\frac{६७५}{५१२}$ और $\frac{५१२}{६७५}$ इन दो साधारण भिन्न संख्याओं में किस का दशमलवरूप सान्त होगा और किस का आवर्त होगा और उन के दशमलवरूप भी कहो ।

उत्तर, पहिली संख्या का दशमलवरूप सान्त होगा और दूसरी का आवर्त होगा और $\frac{६७५}{५१२}$ = १.३१८३५९३७५ और $\frac{५१२}{६७५}$ = .७५$\dot{८}$५$\dot{१}$ ।

(७) $\frac{५ + .५}{४ + .४} \times \frac{५ - .५}{४ - .४}$ और $\frac{४.९ + .४९}{४.९ - .४९} \times \frac{.७}{.३}$ इन को सर्वाणित करो ।

उत्तर, १ $\frac{९}{१६}$, वा, १.५६२५ और २ $\frac{२३}{२७}$, वा, २.$\dot{८}$५$\dot{१}$ ।

(८) १५ + $\frac{३}{५}$ + $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{६३} + \frac{५}{१४}$, $\frac{.७}{३\frac{१}{२}} + \frac{.९}{५\frac{१}{३}}$, $\frac{१७}{.८} - \frac{१५}{१.३}$, $\frac{.४}{.२३} \times \frac{२ - .७}{३ - .४}$ और $\frac{३.५ - १.६१}{२३.४ - २.०७} \div .०००७$ इन को सर्वाणित करो ।

क्रम से उत्तर, १६ $\frac{४}{१५}$, $\frac{५३}{१२६}$, $\frac{५९}{१६०}$, ९ $\frac{३७}{५२}$, $\frac{२०}{२३}$ और १२६ $\frac{४६}{९९}$ ।

(९) $\frac{३७५\frac{२}{५}}{१६४२\frac{३}{८}} \div \frac{३३.६}{४.५५}$ और $\left(\frac{८८.८८}{३५.३५} - \frac{७५.७५}{६४.६४}\right) \div \frac{३६\frac{३}{८}}{२४८\frac{८}{९}}$ इन को सर्वाणित करो ।

उत्तर, $\frac{१३}{४२०}$ और ९ $\frac{५}{२६}$ ।

(१०) $\frac{१}{२}-\frac{१}{४}+\frac{१}{८}-\frac{१}{१६}+\frac{१}{३२}$ इस को दशमलवरूप में सवर्णित करो ।

उत्तर, .३४३७५ ।

(११) जिस दशमलव संख्या को ७५ से गुण देओ तो गुणनफल .८८८८, .२६८७, $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{८}$ और $\frac{७}{१६}$ इन पांच संख्याओं के योग के समान हो वह संख्या क्या है ?

उत्तर, .०४

(१२) २३.७ × २.३७, ५७६.४७४ ÷ ३७.८, $\frac{.००४ \times .०५}{.००२५}$ और $\frac{४.६१३-२.१६७}{२.८६-१.६६}$ इन को दशमलवरूप में सवर्णित करो ।

क्रम से उत्तर, ५६.१६६, १५.३३, .०८ और २.२६३ ।

(१३) $\dfrac{५\frac{१}{४}\times५\frac{१}{४}\times५\frac{१}{४}-१}{५\frac{१}{४}\times५\frac{१}{४}-१}$ इस को दशमलव के रूप में सवर्णित करो ।

उत्तर, ५.४१ ।

(१४) $\frac{१३}{१५}$ का $\frac{१}{१०००}$, $\left(३\frac{१}{३}+६\frac{१}{६}\right)\times\left(२\frac{१}{२}+४\frac{१}{४}\right)$ और $\frac{७.३४+३.५}{७.३४-३.५}$ इन तीनों को दशमलवरूप में सवर्णित करो ।

उत्तर, .०००८६, ६४.१२५ और २.८२२६१६ ।

(१५) ३१५.२८६ इस को २३.७८५ इस से, २५.०७८ इस को १५.४६ इस से और ४३०६.००३ इस को .०७६८ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान ४ आवें ।

उत्तर, ७४६६.१४८६, ३८७.७०५६ और ३४३.८५८४ ।

(१६) ५८.०३६ इस में ७.६३८ इस का, ८.०७४ इस में ६.१०३ इस का और .००४३७ इस में .०७६ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान ५ होवें ।

उत्तर, ७.३११५४, .८८६६६ और .०५५३२ ।

(१७) १.८६३५, २.०४२७३, ३.१४१६ और .०५४३२ इन चारों का अलग २ वर्ग कहो ऐसा कि हर एक में दशमलवस्थान ५ होवें ।

उत्तर, ३.५८५३४, ४.१७२७६, ६.८६६६५ और .००२६५ ।

(१८) ६.१३०२५२८५, ७.४६०६६०८, ६.१७८२३५१, ६.६८२४८४६६ और .६६३३२४६५८ इन का अलग २ वर्ग कहो ऐसा कि हर एक में दशमलवस्थान दो होवें ।

उत्तर, ३७.५८, ५६.११, ८४.२४, ६६.६५. और .४४ ।

(१९) वितत भिन्न संख्या की रीति से $\frac{३७४२}{६८३}$ इस साधारण भिन्न संख्या के आसन्न मान कहो । और हर एक आसन्न मान का और उक्त भिन्न संख्या का अन्तर क्रम से दशमलव के रूप में कहो ऐसे कि जिन में दशमलवस्थान ७ होवें ।

उत्तर, क्रम से आसन्न मान ३, ४, $\frac{१६}{५}$, $\frac{६६}{२६}$, $\frac{११८}{३१}$ और $\frac{४५३}{११६}$ और क्रम से अन्तर .८०६७१४१, .१६३२८५६, .००६७१४१, .०००६७८२, .०००२६२५ और .०००००६६ ।

(२०) ४१ इस संख्या का वर्गमूल दशमलवरूप में कहो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ११ होवें । और वितत भिन्न संख्या की रीति से ४१ के वर्गमूल के सात आसन्न मान कहो और हर एक मान का और पहिले जो दशमलवरूप में वर्गमूल ले आओगे उस का अलग २ अन्तर कहो ।

उत्तर, ४१ का वर्गमूल = ६.४०३१२४२३७४३ और सात आसन्न मान ६, $६\frac{१}{२}$, $६\frac{२}{५}$, $६\frac{२५}{६२}$, $६\frac{५२}{१२९}$, $६\frac{१२९}{३२०}$ और $६\frac{१६००}{३९६९}$ और क्रम से अन्तर .४०३१२४२३७४३, .०९६८७५७६२५७, .००३१२४२३७४३, .०००१०१५६९०२, .००००२३४६२२४, .०००००७६२५७ और .०००००००२४७८ ।

(२१) २.५̇७̇ इस को .०३५̇ इस से, ३२७.५२̇ इस को ७.३̇५८̇ इस से और ५२.०४̇७९̇ इस को ८२.३̇३̇१ इस से गुण देओ ऐसा कि गुणनफल में दशमलवस्थान छ होवें ।

उत्तर, .०९१६८३, २४१०.०२५८८१ और ४२८४.२३९०४७ ।

(२२) .३४७̇२̇ इस में .४९̇३̇ इस का, .७९४̇ इस में २.९८̇४̇ इस का और १०.९̇१३̇ इस में .०̇३५८̇ इस का भाग देओ ऐसा कि लब्धि में दशमलवस्थान ५ होवें ।

उत्तर, .७०३७०, .२६६१६ और ३०४८.२७४४५ ।

$$(२३)\quad \frac{(.\dot{५}\dot{८} + .३\dot{७}) \times (.२\dot{६} - .००\dot{४})}{.६\dot{७}\dot{२} - .४३\dot{७}\dot{५}} \text{ और } \frac{.७\dot{२}\dot{८} \times .७\dot{२}\dot{८} - .\dot{५}२\dot{३} \times .\dot{५}२\dot{३}}{.७\dot{२}\dot{८} + .\dot{५}२\dot{३}}$$

इन को सवर्णित करो ।

उत्तर, $१\frac{२१७}{२९१०}$ = १.०७४५७ इत्यादि और .२०̇४७५९३̇

(२४) १०, $\frac{१}{७}$ और $\frac{७.२८}{.०१३.}$ इन तीन संख्याओं के वर्गमूल कहो ऐसे कि उन में दशमलवस्थान ७ होवें ।

उत्तर, ३.१६२२७७७, .३७७९६४५ और २३.६६४३१९१ ।

(२५) एक पल में शब्द १७४३०.७२ हाथ दूर जाता है और प्रकाश ३०६४२४० हाथ चलता है तो शब्द से प्रकाश कितने गुना अधिक चलता है?

उत्तर, १७५.८९ गुना अधिक चलता है ।

(२६) एक मनुष्य कुछ धन लेके हाट में गया । वहां उस ने अपने धन का .२̇ इतना अंश व्यय किया फिर जो शेष बचा उस का .३̇ इतना अंश दूसरी बार व्यय किया तब जो शेष बचा उस का .४̇ इतना अंश फिर भी व्यय किया तो अन्त में उस के पास उस के सब धन का कौन अंश शेष बचा सो कहो ।

उत्तर, सब धन का $\frac{७०}{२४३}$ अंश अर्थात् .२८८०६५८ इ० अंश शेष बचा ।

(२७) शुद्ध जल से सोने का स्वाभाविक गुरुत्व १९.३६१ इतने गुना, तामे का ८.९ इतने गुना और लोहे का ७.७८८ इतने गुना है तो तामा और सोना ये दो धातु लोहे से कितने भारी होते हैं सो अलग २ कहो ।

उत्तर, तामा १.१४३ इतने गुना भारी होता है और
सोना २.४८६ इतने गुना भारी होता है ।

(२८) वृत्त के व्यास का मान जो १ हो तो उस के परिधि का सूक्ष्म मान ३.१४१५९२६५३५८९७९३ इत्यादि होता है । अब $\frac{३९२७}{१२५०}$, $\frac{३५५}{११३}$, $\frac{२२}{७}$ और $\sqrt{१०}$ इन चारों के मान दशमलवरूप में ले आओ और उन में कौन मान पूर्वोक्त वास्तव परिधिमान के पास है और कौन उस से दूर है सो कहो ।

उत्तर, ३.१४१६, ३.१४१५९२९२ इ०, ३.१४२८५७१४ इत्या० और ३.१६२२७७६६ इत्यादि ये चारो मान क्रम से दशमलवरूप में हैं । इन में दूसरा मान वास्तव मान के बहुत पास है और चौथा अर्थात् अन्त का मान वास्तव मान से बहुत दूर है ।

(२९) पृथ्वी के गोल पिण्ड का .१३८६ इतना अंश मङ्गल का गोल पिण्ड है और पृथ्वी के गोलपिण्ड से १२८०.९ इतने गुना बड़ा बृहस्पति का गोलपिण्ड है तो मङ्गल के पिण्ड से बृहस्पति का पिण्ड कितने गुना बडा है सो कहो ।

उत्तर, ९२४१.७०३ गुना बड़ा है ।

(३०) $२\left(\frac{१}{१३} + \frac{१}{३ + १३^{३}} + \frac{१}{५ + १३^{५}} + \frac{१}{७ + १३^{७}} + इ०\right)$ इस का दशमलवरूप में मान कहो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ७ आवें ।

उत्तर, .१५४१५०७ ।

(३१) ३ का वर्गमूल दशमलव के रूप में ले आके सिद्ध करो कि वह मूल $\frac{७१}{४१}$ और $\frac{९७}{५६}$ इन दोनों के बीच में है ।

(३२) $१६ \times \left\{\frac{१}{५} - \frac{१}{३ \times ५^{३}} \times \frac{१}{५ \times ५^{५}} - \frac{१}{७ \times ५^{७}} + इ०\right\} - \frac{४}{२३९}$ इस का दशमलवरूप में मान कहो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान केवल ४ होवें ।

उत्तर, ३.१४१६ ।

(३३) $\sqrt{७} + \sqrt{५}$ और $२\sqrt{३} + \sqrt{२}$ इन दोनों में किस का मान बडा है सो दशमलव में हर एक मान ले आके दिखला देओ ।

उत्तर, $\sqrt{७} + \sqrt{५} = २.६४५७५१३ + २.२३६०६८० = ४.८८१८१९३$
और $२\sqrt{३} + \sqrt{२} = २ \times १.७३२०५०८ + १.४१४२१३६ = ४.८७८३१५२$ ।

$\therefore \sqrt{७} + \sqrt{५}$ इस का मान $२\sqrt{३} + \sqrt{२}$ इस के मान से बड़ा है ।

(३४) $\frac{१}{१७} + \frac{१}{३ \times १७^{३}} + \frac{१}{५ \times १७^{५}} +$ इत्यादि इस का मान दशमलवरूप में कहो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ७ होवें ।

उत्तर, .०५८८९१५. ।

(३५) $\frac{\sqrt{२}}{\sqrt{३}}$, $\frac{\sqrt{५}}{\sqrt{६}}$ और $\frac{\sqrt{२} + \sqrt{५}}{\sqrt{३} + \sqrt{६}}$ इन तीनों के मान दशमलवमें ले आके दिखला देओ कि तीसरा मान पहिले मान से बड़ा है और दूसरे से छोटा है ।

(३६) $\frac{१}{२} - \frac{१}{२^{३} \times ३} + \frac{१}{२^{५} \times ३ \times ४ \times ५} - \frac{१}{२^{°} \times ३ \times ४ \times ५ \times ६ \times ७} +$ इ० इस का दशमलव रूप में मान कहो ऐसा कि उस में दशमलवस्थान ५ होवें ।

उत्तर, .४६२४० ।

(३७) पृथ्वी ३६५·२५६३६१२ इतने दिन में सूर्य को एक बार परिक्रमा करती है । तो इस दशमलव संख्या के पांच आसन्न मान साधारण भिन्न संख्या के रूप में कहो ।

उत्तर, ३६५, ३६५ $\frac{१}{३}$, ३६५ $\frac{१}{४}$, ३६५ $\frac{१०}{३९}$ और ३६५ $\frac{१३१}{५११}$ ।

(३८) मङ्गल ग्रह जितने दिन में सूर्य की चारो ओर एक बार घूमता है उतने दिन की संख्या ६८६ ९७९६४५८ यह है । अब इस संख्या का वितत भिन्न [illegible]ख्या की रीति से पांचवा आसन्न मान कहो और उस मान का और उक्त दशमलव संख्या का अन्तर कहो ।

उत्तर, पांचवा आसन्न मान = ६८६ $\frac{३८५}{३९३}$ और अन्तर = $\frac{३९९७}{१९६५०००००००}$ ।